

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН,  
Д. Б. ЮДИН

# Задачи линейного программирования транспортного типа



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1969

**Задачи линейного программирования транспортного типа.****Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин.**

В практике применения линейного программирования часто приходится иметь дело с так называемыми специальными линейными задачами, системы ограничений которых обладают теми или иными особенностями. Учет этих особенностей в ряде случаев позволяет разработать для анализа специальных задач методы, значительно более экономные по сравнению с общими методами линейного программирования. Книга посвящена одному из наиболее важных и развитых в настоящее время классов специальных линейных задач — задачам транспортного типа. В гл. 1, 2 приведены многочисленные практические постановки (главным образом экономического происхождения), сводящиеся к задачам транспортного типа. Гл. 3 посвящена изложению теории транспортной задачи в матричной постановке. В гл. 4 дается подробное описание одного из наиболее употребительных методов решения транспортной задачи — метода потенциалов. Эффективный метод решения транспортной задачи, известный под названием венгерского, — предмет гл. 5. Анализ других конечных методов решения транспортной задачи посвящена гл. 6.

Теория и методы решения важного обобщения транспортной задачи — распределительной задачи — составляют содержание гл. 7.

Транспортная сеть — математическая модель сети железных или шоссейных дорог. В терминах транспортных сетей формулируется ряд интересных и важных для приложений специальных задач линейного программирования. Экстремальным задачам транспортных сетей посвящены последние пять глав книги. В гл. 8 изложены основные понятия, связанные с транспортными сетями. Постановка задачи о наиболее экономном маршруте и метод ее решения содержатся в гл. 9. Гл. 10 отведена для задачи о максимальном потоке. В гл. 11 приведены основные результаты теории транспортной задачи в сетевой постановке. Обобщению метода потенциалов и венгерского метода на случай транспортной задачи в сетевой постановке посвящена гл. 12 книги.

Книга содержит 72 рис., 8 таблиц, библиография включает 54 названия.

Предисловие . . . . .	6
-----------------------	---

## ГЛАВА 1

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ (практические задачи)

§ 1. Транспортная задача . . . . .	9
§ 2. Задача выбора . . . . .	13
§ 3. Задача целераспределения . . . . .	15
§ 4. Транспортная задача с запретами . . . . .	17
§ 5. Задача перевозок с промежуточной обработкой . . . . .	20
§ 6. Перевозки неоднородного продукта (частная постановка задачи) . . . . .	24
§ 7. Перевозки неоднородного продукта на разнородном транспорте (частная постановка задачи) . . . . .	27
§ 8. Перевозки с резервированием . . . . .	30
§ 9. Задача о максимальном потоке . . . . .	32
§ 10. Задача о кратчайшем пути . . . . .	34
§ 11. Транспортная задача по критерию времени . . . . .	38
§ 12. Планирование производства и перевозок . . . . .	39

## ГЛАВА 2

### РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ (практические задачи)

§ 1. Планирование перевозки взаимозаменяемых продуктов . . . . .	49
§ 2. Распределение изделий между предприятиями . . . . .	51
§ 3. Распределение самолетов между воздушными линиями . . . . .	52
§ 4. Регулирование парка вагонов . . . . .	54
§ 5. Оптимизация структуры энергетического баланса . . . . .	55
§ 6. Распределение посевной площади . . . . .	59
§ 7. Задача о смеси . . . . .	61
§ 8. Геодезическая задача . . . . .	63

## ГЛАВА 3

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В МАТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

§ 1. Особенности транспортной задачи . . . . .	69
§ 2. Критерий оптимальности плана транспортной задачи . . . . .	80
§ 3. Опорные планы транспортной задачи . . . . .	84

§ 4. Метод «северо-западного угла» вычисления опорного плана задачи $T$ . . . . .	97
§ 5. Целочисленность опорных планов транспортной задачи . . . . .	101
§ 6. Вырожденность в транспортных задачах . . . . .	104

## ГЛАВА 4

## МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

§ 1. Теоретические основы метода . . . . .	109
§ 2. Вырожденность . . . . .	117
§ 3. Метод потенциалов и метод последовательного улучшения плана . . . . .	121
§ 4. Алгоритм метода потенциалов . . . . .	124
§ 5. Пример . . . . .	132
§ 6. Метод минимального элемента определения опорного плана транспортной задачи . . . . .	138
§ 7. Вычислительные особенности метода потенциалов в вырожденном случае . . . . .	141
§ 8. Метод потенциалов для транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций . . . . .	146
§ 9. Пример . . . . .	156

## ГЛАВА 5

## ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

§ 1. Венгерский метод для задачи выбора . . . . .	165
§ 2. Обоснование алгоритма для задачи выбора . . . . .	171
§ 3. Пример . . . . .	176
§ 4. Венгерский метод для транспортной задачи . . . . .	180
§ 5. Обоснование алгоритма для транспортной задачи . . . . .	188
§ 6. Пример . . . . .	193
§ 7. Венгерский метод и метод последовательного сокращения невязок . . . . .	195
§ 8. Общая характеристика венгерского метода . . . . .	201
§ 9. Венгерский метод для транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций . . . . .	205
§ 10. Обоснование алгоритма для задачи $T_d$ . . . . .	211
§ 11. Пример . . . . .	218
§ 12. Построение исходного плана задачи $T_d$ . . . . .	222

## ГЛАВА 6

ДРУГИЕ КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

§ 1. Метод Глейзала . . . . .	231
§ 2. Об алгоритмах решения транспортной задачи, связанных с методом сокращения невязок . . . . .	234
§ 3. Схема решения транспортной задачи, основанная на методе уточнения оценок . . . . .	235
§ 4. О методах анализа транспортной задачи с запретами . . . . .	239

## ГЛАВА 7

**РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА (теория и методы)**

§ 1. Свойства распределительной задачи . . . . .	241
§ 2. Метод решения почти треугольных систем линейных уравнений . . . . .	245
§ 3. Обобщенный метод потенциалов . . . . .	250
§ 4. Дополнительные замечания . . . . .	260
§ 5. Пример . . . . .	265
§ 6. Об одной модификации распределительной задачи . . . . .	271

## ГЛАВА 8

**ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ**

§ 1. Основные понятия и определения . . . . .	274
§ 2. Функции на сети . . . . .	281

## ГЛАВА 9

**ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ НАИБОЛЕЕ ЭКОНОМНОГО МАРШРУТА**

§ 1. Постановка задачи . . . . .	288
§ 2. Метод Минти . . . . .	290
§ 3. Метод Беллмана—Шимбела . . . . .	294

## ГЛАВА 10

**ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ**

§ 1. Свойства потоков на сетях . . . . .	301
§ 2. Алгоритм Форда—Фулкерсона . . . . .	304
§ 3. Некоторые замечания о вычислительной схеме . . . . .	312
§ 4. Пример . . . . .	316

## ГЛАВА 11

**ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ**

§ 1. Постановка задачи . . . . .	320
§ 2. Критерии оптимальности плана задачи $T(q, d, c)$ . . . . .	324
§ 3. Опорные планы и основные коммуникации плана задачи $T(q, d, c)$ . . . . .	326
§ 4. Матричные и сетевые постановки транспортных задач . . . . .	328

## ГЛАВА 12

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ НА СЕТИ**

§ 1. Метод потенциалов для задачи типа $T(q, d, c)$ . . . . .	340
§ 2. Пример . . . . .	350
§ 3. Метод замкнутых маршрутов . . . . .	352
§ 4. Венгерский метод для задачи типа $T(q, d, c)$ . . . . .	359
§ 5. Построение исходного плана $X_0$ и функции потенциалов $U_0$ . . . . .	369
§ 6. Пример . . . . .	371
Цитированная литература . . . . .	375
Предметный указатель . . . . .	379

Среди задач линейного программирования, к которым сводится анализ практических моделей управления и планирования, можно выделить ряд классов задач, матрицы условий которых обладают определенными структурными особенностями. Специфика условий задачи, как правило, сводится к тому, что в каждой строке (или в каждом столбце) матрицы условий только небольшая часть элементов, определенным образом расположенных, оказывается отличной от нуля или от некоторых других фиксированных постоянных.

Особая структура ограничений часто позволяет существенно упростить общие методы линейного программирования применительно к специальным задачам. Иногда особая форма условий задачи подсказывает пути создания специальных методов решения, для которых не всегда могут быть найдены аналоги среди общих методов линейного программирования. Физический смысл конкретных приложений, описываемых моделями линейного программирования, играет также не последнюю роль при разработке методов анализа специальных задач.

Методы, учитывающие особенности структуры задачи, требуют меньше машинного времени и ячеек памяти, чем общие методы линейного программирования. По сравнению с последними экономные методы анализа специальных задач позволяют решать на современных

ЦВМ с ограниченной оперативной памятью задачи гораздо большего размера.

Среди специальных задач в приложениях чаще других встречается так называемая транспортная задача и различные ее модификации и обобщения. В [37] указывается, что по опыту, накопленному в США, 85% решенных задач линейного программирования являются задачами транспортного типа.

Еще до появления первых работ по линейному программированию некоторые частные постановки транспортной задачи изучались специалистами по транспорту. В этой связи следует отметить работу А. Н. Толстого [40]. Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Хичкоку [46], в честь которого эта задача иногда именуется в западной литературе проблемой Хичкока.

В формальных терминах транспортной задачи формулируется большое число задач, отнюдь не связанных с перевозками продуктов. Естественно, что методы вычисления оптимального плана перевозок могут быть использованы для решения таких задач. Больше того, в ряде случаев модификация методов решения транспортных задач приводит к вычислительным схемам решения достаточно широкого класса специальных задач линейного программирования, которые мы здесь называем задачами транспортного типа.

Настоящая работа посвящена задачам транспортного типа и методам их анализа. Для изучения теории и методов решения транспортной задачи и ее модификаций полезно знакомство с общими методами линейного программирования (например, в объеме книги [52]).

Содержание книги разбито на 12 глав. В главе 1 приводится ряд практических задач транспортного типа и задач, которые различными, подчас искусственными

приемами могут быть сведены к этому классу. В главе 2 излагаются практические задачи, которые сводятся к обобщенной транспортной (распределительной) задаче или ее модификациям. Глава 3 посвящена транспортной задаче в матричной постановке. Главы 4—6 представляют собой подробное изложение методов решения транспортной задачи. В главе 7 изучается важное обобщение транспортной задачи, так называемая распределительная задача. В последних пяти главах изучаются методы анализа сетей транспортного типа. Сетевые постановки задач транспортного типа являются достаточно содержательными и наглядными и в ряде случаев допускают использование более экономных методов анализа по сравнению с соответствующими матричными постановками. В главе 8 вводятся основные понятия, связанные с транспортными сетями. Главы 9 и 10 содержат изложение методов решения задач об оптимальных маршрутах и максимальных потоках в сетях. В главах 11 и 12 изучаются транспортные задачи в сетевой постановке и методы их решения.

Авторы весьма признательны В. В. Боковой за оформление рукописи и подготовку ряда иллюстративных примеров.

*Авторы*

Октябрь 1968 г.

# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ (практические задачи)

---

В настоящей главе излагаются задачи планирования и управления, формальные модели которых сводятся к транспортной задаче линейного программирования и различным ее обобщениям.

## § 1. Транспортная задача

**1.1. Классическая транспортная задача** — задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства (станций отправления) в пункты потребления (станции назначения) — встречается чаще других в практических приложениях линейного программирования.

Огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Внедрение математических методов и вычислительных машин в планировании перевозок дает большой народно-хозяйственный эффект.

Транспортная задача формулируется следующим образом. Имеется  $m$  пунктов производства ( $A_1, \dots, A_m$ ) однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов и  $n$  пунктов потребления ( $B_1, \dots, B_n$ ). Заданы объемы производства  $a_i$  каждого пункта производства и размеры спроса  $b_j$  каждого пункта потребления в одних и тех же единицах (в штуках, тоннах, вагонах или других единицах измерения). Известны также транспортные издержки  $c_{ij}$  (расходы), связанные с перевозкой единицы продукта из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ . В термин «транспортные издержки» не всегда вкладывается его

непосредственный экономический смысл. Транспортные издержки здесь — скорее условное понятие, которое в различных задачах может означать себестоимость, расстояние, тариф, время, расход топлива и т. д.

В транспортной задаче требуется составить план перевозок, обеспечивающий наиболее экономным путем (т. е. при минимальных общих транспортных издержках) удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет реализации всего продукта, произведенного всеми пунктами производства. Вместо пунктов производства и пунктов потребления, очевидно, могут рассматриваться станции отправления и станции назначения.

Приведенная формулировка транспортной задачи называется *замкнутой транспортной моделью*. Единственным условием разрешимости замкнутой транспортной задачи является равенство суммарного спроса  $\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)$

суммарному производству  $\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)$ .

Переведем транспортную задачу на формальный язык. Пусть  $x_{ij}$  — количество единиц продукта, поставленное из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ . Суммарные затраты (суммарные транспортные издержки) на перевозку продуктов из всех пунктов производства во все пункты потребления выражаются суммой

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (1.1)$$

Условия полного удовлетворения спроса каждого пункта потребления продуктами из разных пунктов производства имеют вид

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Весь продукт, произведенный в каждом пункте производства, должен быть вывезен в пункты потребления. Формально это означает, что

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

Объемы перевозок — неотрицательные числа: перевозки из пунктов потребления в пункты производства исключены. При формальном решении задачи это условие должно быть зафиксировано (включено в систему ограничений):

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Транспортная задача сводится, таким образом, к минимизации суммарных затрат (1.1) при условиях (1.2)—(1.4). Будем называть задачу (1.1)—(1.4) задачей  $T$ .

1.2. Во многих задачах не нужно требовать, чтобы весь произведенный продукт в каждом пункте производства был реализован или (в других терминах), чтобы весь накопленный на станциях отправления продукт был вывезен на станции назначения. В таких случаях баланс производства и потребления может быть нарушен и условия-равенства (1.3.) заменяются ограничениями-неравенствами

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

означающими, что из каждого пункта производства (с каждой станции отправления) не может быть вывезено больше продукта, чем его там имеется.

Задача, в которой требуется минимизировать сумму (1.1) при условиях (1.2), (1.4) и (1.5), называется *открытой транспортной моделью*.

Открытую модель можно свести к замкнутой, если ввести фиктивный пункт потребления  $B_{n+1}$  с объемом потребления

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

Величина  $b_{n+1}$  определяет суммарный объем нереализованного продукта. Размеры остатков  $x_{i, n+1}$  в разных пунктах производства можно регулировать в зависимости от введенного штрафа  $c_{i, n+1}$  за единицу нереализованного продукта из пункта  $A_i$ .

1.3. Если суммарный объем производства меньше суммарного объема потребления, то полное удовлетворение всех пунктов потребления, конечно, невозможно. В этом случае естественно организовать перевозки так, чтобы наиболее важные пункты удовлетворялись возможно полнее, чтобы весь произведенный продукт был вывезен и чтобы при этом суммарные транспортные издержки были минимальными.

Пусть  $r_j$  — величина ущерба (в денежных единицах), возникающего в результате неудовлетворения запросов пункта  $B_j$  на одну единицу продукта.

Требуется минимизировать суммарные затраты

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n r_j y_j \quad (1.6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad (1.7)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (1.8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.9)$$

$$y_j = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Равенства (1.10) означают, что  $y_j$  — разность между потребностями пункта  $B_j$  и поставками в этот пункт.

Задача (1.6) — (1.10) может быть сведена к обычной транспортной задаче типа  $T$ , если ввести фиктивный пункт производства  $A_{m+1}$  с объемом производства

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

а  $c_{m+1,j}$  положить равными  $r_j$ . Условия транспортной задачи типа  $T$  удобно задавать в виде следующей наглядной таблицы (табл. 1.1).

Основная часть табл. 1.1 заполнена величинами транспортных издержек  $c_{ij}$ . В нижней строке таблицы помещены объемы потребления в пунктах  $B_1, B_2, \dots$

Таблица 1.1

		Пункты потребления $B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{n-1} \quad B_n$					
Пункты производства	$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$\dots$	$c_{1, n-1}$	$c_{1n}$	$a_1$
	$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	$\dots$	$c_{2, n-1}$	$c_{2n}$	$a_2$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$A_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	$\dots$	$c_{m, n-1}$	$c_{mn}$	$a_m$
		$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{n-1}$	$b_n$	Объем потребления

$\dots, B_n$ , а в последнем столбце — объемы производства в пунктах  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .

1.4. При планировании перевозок часто необходимо учитывать ограничения, определяемые пропускными способностями коммуникаций. В таких случаях условия (1.4) следует заменить неравенствами вида

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

где  $d_{ij}$  — предельное число единиц продукта, которое может быть перевезено по коммуникации  $A_i B_j$  за время, оговоренное в условиях задачи. Задачи (1.1) — (1.3), (1.11) и (1.1) (1.2), (1.5), (1.11) называются *транспортными задачами с ограниченными пропускными способностями*.

## § 2. Задача выбора

Одной из частных проблем, укладывающихся в схему транспортной задачи, является так называемая *задача о назначениях* или *задача выбора*. Задача заключается в наиболее экономном распределении  $n$  работ между  $n$  исполнителями, если известны времена (или средства), затрачиваемые каждым исполнителем на каждой работе.

Пусть, например, задано, что  $j$ -й исполнитель затрачивает на  $i$ -ю работу  $t_{ij}$  рабочих часов. Будем считать наиболее экономным назначением такое распределение работ между исполнителями, при котором

достигается минимум суммарного числа рабочих часов на выполнение всех работ.

Обозначим через  $x_{ij}$  число, равное единице, если  $j$ -й исполнитель назначен на  $i$ -ю работу, и нулю, если для  $i$ -й работы выбран другой исполнитель. Суммарное время, затраченное на выполнение всех работ, вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}. \quad (2.1)$$

Условия, гарантирующие прикрепление исполнителя к каждой работе, записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Условия, гарантирующие закрепление за каждым исполнителем какой-то работы, имеют вид

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Кроме (или вместо) естественных условий

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

следовало бы еще потребовать, чтобы все параметры  $x_{ij}$  могли принимать только два значения: 1 или 0. Однако это условие оказывается излишним. Задача минимизации линейной формы (2.1) при условиях (2.2) — (2.4) (впрочем, как и любая транспортная задача с целыми  $a_i$  и  $b_j$ ) всегда имеет целочисленное решение. Оптимальный план задачи выбора представляет собой матрицу  $X = \|x_{ij}\|$ , у которой в каждой строке и каждом столбце стоит только один ненулевой элемент, равный единице.

Задача выбора является частной моделью транспортной задачи. В ней  $m=n$ , а все  $a_i=b_j=1$ .

Задача выбора иногда формулируется не как задача минимизации, а как задача максимизации линейной формы вида (2.1) при условиях вида (2.2) — (2.4).

### § 3. Задача целераспределения

Как следует из предыдущего, термин «транспортная задача» относится не к области применения, а к особенностям математической структуры задачи (1.1) — (1.4). В терминах транспортной задачи могут быть сформулированы и исследованы модели из разных областей приложения линейного программирования.

В литературе (например, в [54 и 31]) обсуждаются разнообразные варианты задачи целераспределения. Задача заключается в наиболее рациональном (в том или ином смысле) распределении целей между огневыми средствами. Качество распределения может определяться суммарным ущербом, нанесенным целям, или предотвращенными в результате поражения противника потерями своих объектов. Рассматриваются также задачи, в которых рациональность решения определяется средним ожидаемым числом уничтоженных целей или средним количеством средств, способных обеспечить заранее заданный эффект воздействия по целям.

Мы здесь изложим лишь простейшие постановки задачи целераспределения, сводящиеся к задаче выбора и к транспортной задаче.

При планировании артподготовки часто имеют дело со следующей ситуацией. Для поражения  $n$  заранее намеченных целей выделено  $n$  огневых единиц. Предполагается, что каждая огневая единица может обстреливать только одну цель. Характеристики уязвимости целей и боевой эффективности огневых единиц будем считать известными. Задача состоит в таком распределении целей между огневыми средствами, при котором противнику наносится максимально возможный ущерб. При этом требуется, чтобы каждая цель была обстреляна.

Переведем задачу на формальный язык. Назовем параметрами управления числа  $x_{ij}$ , равные единице, если  $i$ -е средство назначается на  $j$ -ю цель, и нулю, если  $i$ -е средство не должно действовать по  $j$ -й цели. Обозначим через  $p_{ij}$  вероятность поражения  $i$ -м средством  $j$ -й цели. Числа  $p_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) предполагаются заданными. Будем измерять ущерб, нанесенный противнику,

средневзвешенным (с учетом важности целей) значением числа пораженных целей. Обозначим через  $c_j$  коэффициент важности  $j$ -й цели. Показатель качества целераспределения (в предположении, что по каждой цели действует не более одного средства) может быть записан в виде

$$\sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^n p_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tilde{p}_{ij} x_{ij}, \quad (3.1)$$

где  $\tilde{p}_{ij} = c_j p_{ij}$ .

Параметры целераспределения  $x_{ij}$  должны удовлетворять условиям

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Условия (3.2) означают, что каждая цель должна быть обстреляна. Условия (3.3) означают, что каждое огневое средство должно быть использовано. Дополнительное требование, ограничивающее множество возможных значений  $x_{ij}$  двумя числами 0 и 1, здесь, как и в предыдущей задаче, оказывается излишним.

Таким образом, задача целераспределения свелась к определению набора чисел  $x_{ij}$ , обращающих в максимум линейную форму (3.1) при условиях (3.2)–(3.4). Задача целераспределения в рассматриваемом частном случае сведена к задаче выбора. (Вычисление максимума линейной формы (3.1) можно заменить вычислением минимума

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \hat{p}_{ij} x_{ij},$$

где  $\hat{p}_{ij} = -\tilde{p}_{ij}$ ).

Усложним несколько задачу и допустим, что  $i$ -е подразделение, участвующее в артподготовке, располагает  $m_i$  однородными огневыми единицами ( $i=1, 2, \dots, s$ ). Пусть по-прежнему каждая цель может быть атакована только одним средством. Требуется выяснить,

сколько средств должно ввести в действие каждое подразделение и на какие цели они должны быть направлены, чтобы нанести максимальный ущерб противнику.

Сохраняя предыдущие обозначения, можно свести сформулированную задачу целераспределения к определению переменных  $x_{ij}$ , на которых достигается максимум линейной формы

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^s \tilde{p}_{ij} x_{ij} \quad (3.5)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^s x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq m_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Условия (3.6) фиксируют тот факт, что на каждую цель направляется не более одного средства. При недостатке средств некоторые цели окажутся неатакованными. Условия (3.7) означают, что  $i$ -е подразделение не может ввести в действие более чем  $m_i$  средств. Задача (3.5) — (3.8) является транспортной моделью. Целочисленность ее решения гарантируется теорией. Поэтому необходимость в дополнительном ограничении на значения  $x_{ij}$  отпадает.

Целераспределение без ограничивающего предположения о том, что каждая цель обстреливается не более чем одним средством, является нелинейной задачей (см., например, [54]). Однако в первом приближении решение этой задачи может быть сведено к анализу серии транспортных задач.

#### § 4. Транспортная задача с запретами

Постановка транспортной задачи типа  $T$  предполагает, что любая пара пунктов производства и потребления связана коммуникацией. Однако в ряде практических задач это требование может оказаться нарушенным.

Допустим, что пункт производства  $A_i$  в состоянии транспортировать продукт только в пункты  $B_j$ , где  $j \in E'_i$ , причем  $E'_i$  не обязательно совпадает с полным набором индексов  $j$ .

Пусть  $E''_j$  — совокупность номеров тех пунктов производства, которые могут снабжать пункт потребления  $B_j$ . Обозначим набор пар индексов  $(i, j)$ , которые отвечают пунктам  $A_i, B_j$ , связанным коммуникациями, через  $E$ . Тогда задача составления оптимального плана перевозок сводится к минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j \in E'_i} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i \in E''_j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{(i, j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

при условиях

$$\sum_{j \in E'_i} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in E''_j} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E. \quad (4.4)$$

Сформулированная задача отличается от задачи  $T$  тем, что ее переменные  $x_{ij}$ , отвечающие отсутствующим коммуникациям, заранее полагаются равными нулю. Другими словами, (4.1) — (4.4) эквивалентна задаче  $T$  с дополнительным требованием

$$x_{ij} = 0, \text{ если } (i, j) \notin E.$$

Покажем, что задача (4.1) — (4.4) сводится к задаче типа  $T$ . Пусть

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если существует коммуникация } \overrightarrow{A_i B_j}, \text{ т. е.} \\ & (i, j) \in E, \\ M & \text{в противном случае, т. е. если } (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу  $T$  с матрицей транспортных издержек  $\|\bar{c}_{ij}\|_{m,n}$ . Обозначим ее через  $T(M)$ . Пусть

$$c = \max c_{ij}.$$

Теорема 4.1. Если

$$M > c \sum_{i=1}^m a_i \quad (4.5)$$

и  $\bar{X}^* = \|\bar{x}_{ij}^*\|_{m,n}$  — оптимальный план задачи  $T(M)$ , то имеет место следующая альтернатива:

1. Перевозки  $\bar{x}_{ij}^* = 0$  для всех  $(i, j) \notin E$ , и тогда положительные компоненты  $\bar{X}^*$  составляют решение задачи (4.1) — (4.4).

2. Существует такая пара индексов  $(k, l) \notin E$ , что  $\bar{x}_{kl}^* > 0$ , и в этом случае система условий (4.1) — (4.4) несовместна.

Доказательство. 1. Допустим, что  $\bar{x}_{ij}^* = 0$  при  $(i, j) \notin E$ . Система  $X^*$  перевозок  $\bar{x}_{ij}^*$  для  $(i, j) \in E$  является, очевидно, в этом случае планом задачи (4.1) — (4.4). Учитывая, что любой план задачи (4.1) — (4.4), дополненный нулевыми перевозками, оказывается планом задачи  $T(M)$ , а также оптимальность плана  $\bar{X}^*$ , приходим к выводу, что  $X^*$  — решение задачи (4.1) — (4.4).

2. Пусть для некоторой пары индексов  $(k, l) \notin E$  перевозка  $\bar{x}_{kl}^*$  оказывается положительной и вместе с тем система условий (4.1) — (4.4) совместна. Положим, что  $X = \{x_{ij}\}_{(i,j) \in E}$  — одно из решений этой системы. Дополним  $X$  до плана  $\bar{X}$  задачи  $T(M)$  с помощью нулевых перевозок. Имеем

$$L_M(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \leq c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = c \sum_{i=1}^m a_i. \quad (4.6)$$

С другой стороны,

$$L_M(\bar{X}^*) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} \bar{x}_{ij}^* \geq M \bar{x}_{kl}^* \geq M. \quad (4.7)$$

Учитывая оптимальность плана  $\bar{X}^*$ , получаем

$$L_M(\bar{X}^*) \leq L_M(\bar{X}),$$

или, в силу (4.6) и (4.7),

$$M \leq c \sum_{i=1}^m a_i.$$

Следовательно, наличие неравенства (4.5) и возможность 2 указывают на несовместность системы условий (4.2)—(4.4).

Заметим, что соотношение (4.7) может считаться обоснованным только в предположении неотрицательности чисел  $c_{ij}$  и целочисленности объемов производства и потребления (последнее гарантирует целочисленность  $\bar{x}_{kl}^*$ , т. е. справедливость неравенства  $\bar{x}_{kl}^* \geq 1$  для любой положительной перевозки  $\bar{x}_{kl}^*$ ). Однако, как легко показать, теорема 4.1 справедлива и без этих дополнительных допущений. Следует только заменить неравенство (4.5) в ее формулировке соотношением

$$M > M_0,$$

где  $M_0$  — некоторое фиксированное число. Рассмотренную задачу перевозок, в которой некоторые коммуникации отсутствуют, иногда называют транспортной задачей с запретами.

## § 5. Задача перевозок с промежуточной обработкой

Рассмотрим модель транспортировки, в которой пункты производства выпускают некоторый полуфабрикат, требующий определенной обработки перед поступлением в пункты потребления. Пусть, как обычно,  $A_1, A_2, \dots, A_m$  — пункты производства с объемами производства  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , а  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — пункты потребления с объемами потребления, равными  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Допустим, что обработка полуфабриката может производиться в пунктах  $C_1, C_2, \dots, C_h$ , причем на рассматриваемом отрезке времени возможности пункта обработки  $C_h$  ограничена  $d_h$  единицами продукта.

Пусть стоимость перевозки единицы полуфабриката из  $A_i$  в  $C_h$  составляет  $c'_{ih}$  денежных единиц, а пере-

возка единицы продукта из  $C_\lambda$  в  $B_j$  обходится в  $c''_{\lambda j}$  единиц. Задача заключается в составлении такого плана перевозок, при котором весь полуфабрикат вывозится, полностью обрабатывается, потребности всех пунктов потребления удовлетворяются и при этом транспортные расходы достигают минимума.

Приведем математическую формулировку задачи. Пусть  $z_{i\lambda j}$  — количество продукта, доставляемое из  $A_i$  в  $B_j$  через пункт обработки  $C_\lambda$ . Требуется определить план перевозок  $\{z_{i\lambda j}\}$ , на котором достигается минимум линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\lambda=1}^k \sum_{j=1}^n (c'_{i\lambda} + c'_{\lambda j}) z_{i\lambda j} \quad (5.1)$$

при условиях

$$\sum_{\lambda=1}^k \sum_{j=1}^n z_{i\lambda j} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\lambda=1}^k z_{i\lambda j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{i\lambda j} \leq d_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad (5.4)$$

$$z_{i\lambda j} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \lambda = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

Легко проверить, что необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (5.1) — (5.5)

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{\lambda=1}^k d_\lambda. \quad (5.6)$$

Предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Преобразуем задачу (5.1) — (5.5), введя новые переменные

$$\left. \begin{aligned} x_{i, n+\lambda} &= \sum_{j=1}^n z_{i\lambda j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \lambda = 1, 2, \dots, k, \\ x_{m+\lambda, j} &= \sum_{i=1}^m z_{i\lambda j}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

В соответствии с (5.7)  $x_{i, n+\lambda}$  — количество полуфабриката, отправляемое из пункта производства  $A_i$  в пункт обработки  $C_\lambda$ ;  $x_{m+\lambda, j}$  — количество продукта, поступающее из пункта обработки  $C_\lambda$  в пункт потребления  $B_j$ . В новых переменных задача (5.1) — (5.5) формулируется так: требуется минимизировать

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\lambda=1}^k c'_{i\lambda} x_{i, n+\lambda} + \sum_{\lambda=1}^k \sum_{j=1}^n c''_{\lambda j} x_{m+\lambda, j} \quad (5.8)$$

при условиях

$$\sum_{\lambda=1}^k x_{i, n+\lambda} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.9)$$

$$\sum_{\lambda=1}^k x_{m+\lambda, j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i, n+\lambda} = \sum_{j=1}^n x_{m+\lambda, j} \leq d_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad (5.11)$$

$$x_{i, n+\lambda} \geq 0, \quad x_{m+\lambda, j} \geq 0, \quad (5.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Условия (5.9) — (5.11) образуются соответственно из условий (5.2) — (5.4).

Формулы (5.7) устанавливают соответствие между планами задач (5.1) — (5.5) и (5.8) — (5.12), причем линейные формы (5.1) и (5.8) на соответствующих друг другу планах имеют равные значения. Отсюда, в частности, вытекает, что оптимальному плану одной задачи отвечает решение другой.

Займемся анализом задачи (5.8) — (5.12). Введем переменные

$$x_{m+\lambda, n+\lambda} \geq 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k,$$

с помощью которых условия (5.11) могут быть представлены в эквивалентной форме:

$$\sum_{i=1}^m x_{i, n+\lambda} + x_{m+\lambda, n+\lambda} = d_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k, \quad (5.13)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{m+\lambda, j} + x_{m+\lambda, n+\lambda} = d_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, k. \quad (5.14)$$

Таблица 1.2

	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	$B_{n+1}$	$B_{n+2}$	...	$B_{n+k-1}$	$B_{n+k}$	
$A_1$	$M$	$M$	...	$M$	$c'_{11}$	$c'_{12}$	...	$c'_{1,k-1}$	$c'_{1k}$	$a_1$
$A_2$	$M$	$M$	...	$M$	$c'_{21}$	$c'_{22}$	...	$c'_{2,k-1}$	$c'_{2k}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$A_m$	$M$	$M$	...	$M$	$c'_{m1}$	$c'_{m2}$	...	$c'_{m,k-1}$	$c'_{mk}$	$a_m$
$A_{m+1}$	$c''_{11}$	$c''_{12}$	...	$c''_{1n}$	0	$M$	...	$M$	$M$	$d_1$
$A_{m+2}$	$c''_{21}$	$c''_{22}$	...	$c''_{2n}$	$M$	0	...	$M$	$M$	$d_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$A_{m+k-1}$	$c''_{k-1,1}$	$c''_{k-1,2}$	...	$c''_{k-1,n}$	$M$	$M$	...	0	$M$	$d_{k-1}$
$A_{m+k}$	$c''_{k1}$	$c''_{k2}$	...	$c''_{kn}$	$M$	$M$	...	$M$	0	$d_k$
	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$d_1$	$d_2$	...	$d_{k-1}$	$d_k$	

Теперь легко проверить, что задача (5.8) — (5.12) — транспортная задача с запретами. Действительно, введем дополнительные пункты производства:  $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_{m+k}$  с объемами производства  $d_1, d_2, \dots, d_k$  и дополнительные пункты потребления  $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_{n+k}$  с объемами потребления  $d_1, d_2, \dots, d_k$ . Допустим, что пункт  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) связан коммуникациями лишь с пунктами  $B_{n+\lambda}$ ,  $\lambda=1, 2, \dots, k$ , а из пункта  $A_{m+\lambda}$  ( $\lambda=1, 2, \dots, k$ ) можно транспортировать продукт только в пункты  $B_1, B_2, \dots, B_n$  и  $B_{n+\lambda}$ . При этом по условию

$$c_{i, n+\lambda} = c'_{i\lambda}, \quad c_{m+\lambda, j} = c''_{\lambda j}, \quad c_{m+\lambda, n+\lambda} = 0,$$

где

$$i=1, 2, \dots, m, \quad \lambda=1, 2, \dots, k, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

В этих предположениях равенства (5.9) и (5.14) обеспечивают полный вывоз продукта из всех пунктов производства по имеющимся коммуникациям; равенства (5.10) и (5.13) гарантируют, что запланированные перевозки удовлетворяют спрос всех пунктов потребления. Итак, (5.8) — (5.12) действительно является транспортной задачей с запретами, которая в соответствии с выводами § 4 легко приводится к задаче типа  $T$ .

Условия эквивалентной транспортной задачи типа  $T$ , записанные в компактной форме, приведены в табл. 1.2.

В табл. 1.2  $M$  — достаточно большое число.

## § 6. Перевозки неоднородного продукта (частная постановка задачи)

В моделях транспортного типа, рассмотренных в этой главе, речь шла о перевозке однородного продукта. Естественно, что на практике чаще возникает задача перевозки ряда продуктов. Если рассматриваемые продукты качественно совершенно различны (например, уголь, цемент, сахар), так что ни один из них не может быть использован вместо другого, то в первом приближении задача составления оптимального плана перевозок распадается на ряд обычных транспортных задач (по углю, цементу, сахару). Однако во многих случаях

продукты, подлежащие перевозке, частично взаимозаменяемы (например, уголь, нефть, мазут или цементы различных марок). Тогда возникает необходимость в решении транспортной задачи для неоднородного продукта.

Мы приведем здесь простейшую постановку этой задачи, которая может быть сведена к задаче типа  $T$ . Как обычно, через  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) обозначим пункты производства, через  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) — пункты потребления. Пусть в пунктах  $A_1, \dots, A_m$  производятся продукты  $C_1, C_2, \dots, C_r$ , причем в пункте  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) имеются продукты  $C_\lambda$  при  $\lambda \in E_i$ , число которых  $r_i$  ( $E_i$  — множество номеров продуктов, производимых в  $A_i$ ). Продукты, потребляемые в пункте  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), разделяются на такие  $l_j$  групп (возможно пересекающихся), что внутри каждой группы существует полная взаимозаменяемость составляющих. Пусть  $\mu$ -я группа пункта  $B_j$  состоит из продуктов  $C_\lambda$  при  $\lambda \in S_{j\mu}$ . Для каждой группы взаимозаменяемых продуктов определена система коэффициентов  $k_{j\mu\lambda}$ , позволяющих приводить ее составляющие к единому эквиваленту. Количество  $x$  эквивалентного продукта  $\mu$ -й группы пункта  $B_j$  рассчитывается по формуле

$$x = \sum_{\lambda \in S_{j\mu}} k_{j\mu\lambda} x_\lambda,$$

где  $x_\lambda$  — количество продукта  $C_\lambda$ ; числа  $k_{j\mu\lambda}$  — коэффициенты взаимозаменяемости. Известны объемы производства  $a_{i\lambda}$  продуктов  $C_\lambda$ ,  $\lambda \in E_i$ , в каждом из пунктов  $A_i$  и потребности  $b_{j\mu}$  по каждой группе взаимозаменяемых продуктов в единицах эквивалентного продукта ( $j=1, 2, \dots, n$ ,  $\mu=1, 2, \dots, l_j$ ). Заданы также транспортные расходы  $c_{ij\lambda}$  на перевозку единицы  $\lambda$ -го продукта из  $A_i$  в  $B_j$ .

Задача заключается в составлении такого плана перевозок, который удовлетворяет потребности всех пунктов  $B_j$  по каждой группе взаимозаменяемых продуктов за счет возможностей пунктов  $A_i$  при минимальных транспортных затратах. Если допустить, что коэффициенты взаимозаменяемости не зависят от номера

пункта и номера группы продуктов, а определяются только самими продуктами, т. е.  $k_{j\mu\lambda} = k_\lambda$ , то рассматриваемая задача легко приводится к транспортной задаче типа  $T$  (см. гл. 14 сборника [39]). Для этого каждый пункт  $A_i$  расщепляется на пункты  $A_{i\lambda}$ ,  $\lambda \in E_i$ , по числу продуктов, имеющих в нем. Объем производства пункта  $A_{i\lambda}$  полагается равным  $k_\lambda a_{i\lambda}$  — количеству эквивалентного продукта, соответствующему возможностям  $a_{i\lambda}$  пункта  $A_i$  по  $\lambda$ -му продукту.

Каждый пункт потребления  $B_j$  в свою очередь заменяется группой пунктов  $B_{j\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, l_j$ , причем запросы  $B_{j\mu}$  предполагаются равными потребностям  $b_{j\mu}$  пункта  $B_j$  в  $\mu$ -й группе продуктов. Возможности и потребности пунктов  $A_{i\lambda}$  и  $B_{j\mu}$  измеряются, как мы видим, в единицах эквивалентного продукта.

Пункт  $A_{i\lambda}$  связывается коммуникацией с пунктом  $B_{j\mu}$  в том и только в том случае, если  $\mu$ -я группа взаимозаменяемых продуктов пункта  $B_j$  содержит продукт  $C_\lambda$ . Элемент матрицы транспортных издержек, соответствующий пунктам  $A_{i\lambda}$  и  $B_{j\mu}$ , полагается равным

$$\frac{c_{ij\lambda}}{k_\lambda}$$

— затратам на перевозку единицы эквивалентного продукта.

Очевидно, сформулированная задача для неоднородного продукта эквивалентна транспортной задаче с запретами, условия которой только что указаны. Обычным приемом эта задача далее приводится к задаче типа  $T$ . Размеры эквивалентной задачи определяются, таким образом, числами

$$\alpha = \sum_{i=1}^m r_i \quad \text{и} \quad \beta = \sum_{j=1}^n l_j.$$

Отметим, что отказ от допущения

$$k_{j\mu\lambda} = k_\lambda$$

делает, вообще говоря, невозможной замену задачи для неоднородного продукта задачей типа  $T$ .

## § 7. Перевозки неоднородного продукта на разнородном транспорте (частная постановка задачи)

Как мы видели, задачи планирования работы транспорта усложняются, если перевозке подлежат неоднородные предметы. Задача становится еще более сложной, когда, кроме того, и транспорт, предназначенный для перевозки, оказывается разнородным. Тем не менее в ряде случаев удастся искусственными приемами свести такую задачу к классической транспортной задаче.

Пусть для обеспечения перевозок могут быть использованы  $s$  автохозяйств, в каждом из которых  $r$  типов автомашин. Примем, что машины разных типов, обладая различными эксплуатационными характеристиками и разной скоростью, могут доставлять любой из  $m$  грузов каждому из  $n$  потребителей.

Расстояние от места расположения  $l$ -го автохозяйства ( $l=1, 2, \dots, s$ ) до пункта производства  $i$ -го груза ( $i=1, 2, \dots, m$ ) предполагается известным. Будем также считать известным состояние дороги, следовательно, скорость машин  $k$ -го типа ( $k=1, 2, \dots, r$ ) для всех маршрутов, подлежащих рассмотрению. К перечисленным сведениям необходимо добавить еще данные о времени погрузки и разгрузки машины каждого типа под любым грузом в каждом пункте назначения. При наличии всей этой информации можно вычислить величины  $t_{ijlk}$  — время занятости одной машины  $k$ -го типа  $l$ -го автохозяйства на работах по перевозке  $i$ -го груза  $j$ -му потребителю. Введем еще следующие обозначения:

$a_{lk}$  — количество машин  $k$ -го типа в  $l$ -м автохозяйстве;

$c_{ij}$  — число единиц  $i$ -го груза, подлежащего перевозке  $j$ -му потребителю;

$d_{ij}$  — число единиц  $i$ -го груза, которое перевозится в  $j$ -й пункт назначения на одной машине. Величина  $d_{ij}$  определяется по известной грузоподъемности машин, которая здесь предполагается независимой от типа машин, по состоянию дорог и заблаговременно запланированному количеству рейсов  $i$ -го груза  $j$ -му потребителю.

Учет различной грузоподъемности машин разного типа сводит задачу к распределительной (см. гл. 2).

Требуется решить, сколько машин того или иного типа из какого автохозяйства следует направить для удовлетворения спроса каждого потребителя в каждом виде груза. План организации перевозок будет наилучшим в том случае, если спрос всех пунктов потребления на все грузы будет удовлетворен наличным числом транспортных средств наиболее экономным путем, т. е. при минимальных суммарных затратах автомобилечасов.

Примем в качестве искомых параметров величины  $x_{ijlk}$  — количество машин  $k$ -го типа из  $l$ -го автохозяйства, предназначенных для перевозки  $i$ -го груза  $j$ -му потребителю. В принятых обозначениях задача наилучшей организации перевозок формулируется следующим образом. Требуется вычислить значения переменных  $x_{ijlk}$ , на которых достигается минимум линейной формы

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^r t_{ijlk} x_{ijlk} \quad (7.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ijlk} \leq a_{lk}, \quad (7.2)$$

$$l = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

$$\sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^r d_{ijl} x_{ijlk} = c_{ij}, \quad (7.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ijlk} \geq 0, \quad (7.4)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, s, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Показатель качества плана фиксирует суммарные затраты автомобилечасов. (Под  $t_{ijlk}$ , естественно, можно понимать и любые другие виды затрат, связанные с перевозкой единицы  $i$ -го груза в  $j$ -й пункт назначения на одной машине  $k$ -го типа из  $l$ -го автохозяйства.)

В ограничениях (7.2) записано, что общее число автомашин  $k$ -го типа, направленных из  $l$ -го автохозяйства на перевозку всех грузов ко всем потребителям, не

может превысить числа транспортных единиц  $k$ -го типа, которым располагает  $l$ -е автохозяйство.

Условия (7.3) означают, что спрос каждого пункта потребления в каждом виде груза должен быть полностью удовлетворен. Структура условий (7.2), (7.3) позволяет при помощи простого преобразования свести четырехиндексную задачу (7.1) — (7.4) к классической двухиндексной транспортной задаче.

Заменяем пары индексов  $(i, j)$  и  $(l, k)$  двумя индексами  $\lambda$  и  $\mu$  по следующим формулам:

$$\lambda = i + m(j - 1),$$

$$\mu = l + s(k - 1).$$

Когда индекс  $i$  пробегает значения  $1, 2, \dots, m$ , а  $j$  — значения  $1, 2, \dots, n$ , индекс  $\lambda$  принимает все целочисленные значения от 1 до  $mn$ . Индекс  $\mu$  пробегает значения  $1, 2, \dots, sr$ .

Введем замену переменных

$$x_{ijkl} = z_{\lambda\mu},$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n; l = 1, \dots, s, k = 1, \dots, r.$$

Обозначим, кроме того,  $t_{ijk}$  через  $\tau_{\lambda\mu}$ , отношение  $c_{ij}/d_{ik}$  через  $g_{\lambda}$ ,  $a_{lk}$  через  $b_{\mu}$ . В новых обозначениях задача (7.1) — (7.4) сводится к вычислению переменных  $z_{\lambda\mu}$ , обращающих в минимум линейную форму

$$\sum_{\lambda=1}^{mn} \sum_{\mu=1}^{sr} \tau_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu} \quad (7.5)$$

при условиях

$$\sum_{\lambda=1}^{mn} z_{\lambda\mu} \leq b_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, sr, \quad (7.6)$$

$$\sum_{\mu=1}^{sr} z_{\lambda\mu} = g_{\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, mn, \quad (7.7)$$

$$z_{\lambda\mu} \geq 0, \quad \lambda = 1, \dots, mn; \mu = 1, \dots, sr. \quad (7.8)$$

Мы пришли к обычной транспортной задаче типа  $T$  размеров  $mn \times sr$ . По компонентам  $z_{\lambda\mu}$  оптимального плана задачи (7.5)–(7.8) вычисляются составляющие  $x_{ijlk}$  решения задачи (7.1)–(7.4). При этом индексы  $i$  и  $j$  вычисляются по формулам

$$i = \begin{cases} m, & \text{если } \lambda \text{ кратно } m, \\ \text{остатку от деления } \lambda \text{ на } m, & \text{если } \lambda \text{ не делится на } m; \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} \lambda/m, & \text{если } \lambda \text{ кратно } m, \\ \text{целой части выражения } \left(\frac{\lambda}{m} + 1\right), & \text{если } \lambda \text{ не делится} \\ \text{на } m. \end{cases}$$

Аналогичным путем вычисляются индексы  $l$  и  $k$ .

Суть использованного приема состоит в том, что каждый пункт, потребляющий  $m$  различных грузов, рассматривается как группа из  $m$  разных пунктов, а автохозяйство с  $r$  типами машин учитывается как  $r$  автохозяйств. Соответственно определяются потребности каждого пункта назначения и возможности каждого транспортного подразделения.

Рассмотренный здесь прием сокращения числа индексов переменных задачи является достаточно общим. Он может быть использован при решении многих задач организации перевозок и целераспределения в сложной обстановке, когда нужно учитывать особенности различных видов груза и транспорта или особенности различных групп целей и огневых средств.

## § 8. Перевозки с резервированием

Рассмотрим задачу планирования перевозок однородного продукта в условиях, когда по тем или иным причинам представляется целесообразным резервировать в некоторых районах определенное количество продукта. Обозначим через  $I_k$  совокупность номеров  $i$  пунктов производства, входящих в  $k$ -й район. Требуется организовать перевозки таким образом, чтобы в  $k$ -м

районе ( $k=1, 2, \dots, s$ ) сохранилось не менее  $v_k$  единиц произведенного продукта. Ограничения по резервам могут быть записаны в виде дополнительных условий

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i \in I_k} a_i - v_k, \quad k=1, 2, \dots, s. \quad (8.1)$$

В условии (8.1) зафиксировано, что общее число продуктов, вывезенное из всех пунктов производства  $k$ -го района, должно быть по крайней мере на  $v_k$  (на величину заданного резерва) меньше суммарного количества продукта, произведенного в этом районе.

Задача минимизации линейной формы (1.1) при условиях (1.2), (1.4), (1.5) и (8.1) представляет собой модель планирования перевозок, обеспечивающих удовлетворение спроса всех пунктов потребления и гарантирующих сохранение требуемых резервов в каждом районе.

В работе С. М. Мовшовича [34] показано, что анализ такой модели может быть сведен к решению классической транспортной задачи (открытой модели), если для любой пары множеств  $I_k$  и  $I_l$  выполняется одно из следующих требований:

- 1) множества  $I_k$  и  $I_l$  не пересекаются (не содержат общих элементов);
- 2) одно из множеств полностью включает в себя другое.

В рассмотренной задаче выполняется первое из этих условий. С. М. Мовшович предложил также эффективный алгоритм сведения модели вида (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (8.1) к открытой транспортной модели. Естественно, что в эквивалентной транспортной задаче число переменных больше, чем в модели, содержащей условия (8.1).

К модели, рассматриваемой в этом пункте, сводится и ряд других задач планирования перевозок. Пусть, например, пункты производства с номерами  $i \in I_k$  соединены железной дорогой с  $k$ -й станцией ( $k=1, 2, \dots, s$ ), а пропускная способность  $k$ -й станции ограничена величиной  $d_k$ .

Ограничение пропускных способностей станций, соединенных с группами пунктов производства, может быть записано в виде

$$\sum_{i \in I_k} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (8.2)$$

Планирование перевозок, требующее учета ограниченных пропускных способностей промежуточных станций, сводится, таким образом, к задаче (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (8.2).

## § 9. Задача о максимальном потоке

Во многих случаях задачи транспортного типа удобнее задавать не в матричной форме, как в предыдущих пунктах, а на сетях, используя графическое изображение сети путей сообщения. Для некоторых классов транспортных задач на сети разработаны специфические методы решения (так называемые сетевые методы) более экономные, чем методы, основанные на матричной записи задачи.

Не вдаваясь в строгие определения, связанные с построением и анализом транспортных сетей, перечислим несколько примеров задач линейного программирования транспортного типа, применительно к которым сетевая постановка оказывается удобной для исследования. Рассмотрим транспортную сеть — систему станций  $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ , соединенных между собой коммуникациями с заданной пропускной способностью  $d_{ij}$ . Величина  $d_{ij}$  определяет максимальное число единиц продукта (или транспортных единиц), которое может быть доставлено непосредственно со станции  $A_i$  на станцию  $A_j$ .

Пусть задача заключается в организации перевозок из некоторого исходного пункта  $A_0$  в конечный пункт  $A_{n+1}$ . В ряде приложений важно определить максимальное количество продукта, которое может быть перевезено из  $A_0$  в  $A_{n+1}$ . Такие задачи называют *задачами о максимальном потоке*.

Нетрудно видеть, что задача о максимальном потоке представляет собой задачу линейного программирования специального вида.

Обозначим через  $x_{ij}$  количество продукта, перевозимое в единицу времени из  $A_i$  в  $A_j$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, n+1$ ). Будем предполагать, что если станции  $A_i$  и  $A_j$  не соединены непосредственно путями сообщения, то соответствующая пропускная способность  $d_{ij}$  равна нулю. Задача о максимальном потоке сводится к вычислению набора чисел  $x_{ij}$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, n+1$ ), на которых достигается максимум линейной формы

$$\sum_{i=0}^n x_{i, n+1} \quad (9.1)$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^n x_{ki} - \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (9.3)$$

Условия (9.2) означают, что на любой из промежуточных станций продукт не изымается и не производится: количество продукта, поступившее на станцию, совпадает с количеством продукта, вывезенным с этой станции.

Для задачи о максимальном потоке разработаны специальные «сетевые» методы решения, значительно более экономные, чем известные матричные методы.

В [2] указывается, что сетевые методы позволяют находить ручную решение задачи о потоке для весьма сложных сетей, содержащих сотни узлов и тысячи коммуникаций.

Ясно, что задаче о максимальном потоке можно придать не только транспортную интерпретацию.

К решению задачи о максимальном потоке сводится задача об определении максимального количества информации, которая может быть передана по разветвленной сети связи из одного пункта в другой. К задачам о максимальном потоке сводятся также различные

проблемы, связанные со строительством ирригационных систем, с проектированием газопроводов, нефтепроводов, с планированием и организацией снабжения крупных центров и др.

## § 10. Задача о кратчайшем пути

Рассмотрим еще одну задачу, для которой естественная сетевая постановка оказывается удобнее соответствующей матричной модели. Это так называемая *задача о кратчайшем пути*.

Пусть задана транспортная сеть, состоящая из станций  $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  и коммуникаций, соединяющих некоторые из этих пунктов. Длины коммуникаций  $A_i A_j$  предполагаются известными и равными  $c_{ij}$ . Если станции  $A_i$  и  $A_j$  непосредственно не соединены между собой, полагаем  $c_{ij} = \infty$ . Из начальной станции  $A_0$  на конечную станцию  $A_{n+1}$  можно попасть по большому числу различных путей, проходящих через разные промежуточные станции. Требуется выделить из всех этих путей путь наименьшей длины \*).

Задача легко записывается аналитически.

Приведем в соответствие каждой паре пунктов  $A_i$  и  $A_j$  числа  $x_{ij}$ , равные единице, если участок  $A_i A_j$  принадлежит выбранному пути, по которому предполагается двигаться со станции  $A_0$  на станцию  $A_{n+1}$ , и нулю в противном случае.

Все участки пути — направленные коммуникации. Длина  $c_{ij}$  коммуникации  $A_i A_j$  может не совпадать с длиной  $c_{ji}$  коммуникации  $A_j A_i$ .

Задача о кратчайшем пути сводится, таким образом, к выбору чисел  $x_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n, n+1$ ), для которых линейная форма

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \quad (10.1)$$

---

\*) Путь (или маршрут) это — последовательность коммуникаций  $A_{i_1} A_{j_1}, A_{i_2} A_{j_2}, \dots, A_{i_k} A_{j_k}$ , в которой каждая пара коммуникаций, стоящих рядом, имеет один общий пункт, а остальные пары коммуникаций не содержат общих пунктов.

достигает минимума при условиях

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{ij} - \sum_{j=0}^{n+1} x_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.2)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{0j} - \sum_{j=0}^{n+1} x_{j0} = 1, \quad (10.3)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} x_{n+1,j} - \sum_{j=0}^{n+1} x_{j,n+1} = -1, \quad (10.4)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n, n+1). \quad (10.5)$$

Условия (10.2) означают, что для любого пункта  $A_i$ , не являющегося начальной или конечной станцией сети, число коммуникаций пути, исходящих из пункта, равно числу коммуникаций, входящих в пункт. Поскольку  $c_{ij} > 0$  для всех  $i$  и  $j$ , приходим к выводу, что условия (10.2) вместе с требованием минимизации линейной формы (10.1) означают, что из каждой станции  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) выходит не более одной коммуникации пути.

Условие (10.3) фиксирует тот факт, что количество коммуникаций, исходящих из пункта  $A_0$ , превышает на единицу число коммуникаций, входящих в этот пункт. Аналогичным образом условия (10.4) свидетельствуют о том, что в пункт  $A_{n+1}$  входит на одну коммуникацию больше, чем выходит. Вместе с условиями (10.2) и требованием минимизации линейной формы (10.1) условия (10.3) и (10.4) означают, что на каждую станцию  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ) приходит ровно одна коммуникация и из каждой станции  $A_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) исходит ровно одна коммуникация. Можно показать, что условия (10.5) в задаче (10.1)—(10.5) эквивалентны требованию, согласно которому все  $x_{ij}$  равны нулю или единице. Таким образом, на соотношения (10.1)—(10.5) можно смотреть как на определение кратчайшего пути в сети.

Параметры  $c_{ij}$  могут означать не только длины соответствующих участков пути, но и стоимости или продолжительности проезда по этим коммуникациям или любые другие характеристики участков пути. Однако, чтобы модель (10.1)—(10.5) для произвольной

транспортной сети соответствовала задаче о кратчайшем пути, коэффициенты  $c_{ij}$  должны быть положительны. При некоторых частных видах сетей требование  $c_{ij} > 0$  не является необходимым для того, чтобы можно было принять соотношения (10.1)—(10.5) в качестве определения кратчайшего пути. Это имеет место, в частности, для сетей, не содержащих циклов (направленных замкнутых маршрутов). Из отсутствия циклов в сети следует, что в каждый пункт может входить не более одной коммуникации пути. Приведенные соображения показывают, что условия (10.2)—(10.5) определяют путь даже без требования минимизации линейной формы (10.1).

Алгоритм решения задачи о кратчайшем пути может быть использован для определения критического пути в сети работ, изучаемой в системах сетевого планирования.

Система СПУ (сетевого планирования и управления) — это современная система планирования и оперативного управления новыми разработками. Она применяется также при составлении текущих и перспективных планов в разных отраслях хозяйства, для программирования ЦВМ, для проектирования, реконструкции, строительства и ввода в строй предприятий, коммуникаций, энергетических систем и т. д.

Тщательное изучение процесса создания системы и ее подсистем позволяет составить сеть работ и их результатов, определяющую логическую последовательность работ и их взаимосвязи. Специалист по каждой работе определяет продолжительность этой работы при заданных ресурсах. Анализ сети сводится к сравнению продолжительностей работ, составляющих разные пути. Количество путей в сети, отвечающей организации работ по созданию сложной системы, чрезвычайно велико. Путь, соответствующий максимальной продолжительности работ, называется *критическим путем*. Если необходимо сократить общую продолжительность работ, следует сокращать лишь продолжительность участков критического пути.

Поиск критического пути представляет собой задачу о кратчайшем пути, в которой длинам участков сети присвоены значения, равные продолжительностям работ,

взятым с обратным знаком. Сеть работ, составленная в соответствии с правилами системы СПУ, по самому своему определению не имеет циклов. Поэтому модель (10.1) — (10.5) может быть использована для определения критического пути. В качестве  $c_{ij}$  в этом случае принимается взятая с обратным знаком продолжительность работы, которая переводит событие (результат)  $i$  в событие (результат)  $j$ .

Система СПУ требует экономного алгоритма вычисления критического пути, поскольку на современном уровне использования этой системы в процессе планирования приходится многократно определять напряженные последовательности работ в сети. Если продолжительность работ, отвечающая критическому пути, превышает допустимую, рассматривают различные мероприятия, сокращающие сроки выполнения работ на участках критического пути за счет использования сил и средств с ненапряженных участков. Для каждой из моделируемых систем мероприятий вычисляют критический путь. Критический путь минимальной (или допустимой) продолжительности является основой для составления плана и графика работ.

Более совершенная процедура планирования разработок приводит к следующей задаче. Задана сеть работ и результатов, отвечающих процессу создания некоторой сложной системы. Для каждого участка сети разработан ряд способов производства. Способ производства характеризуется вектором, определяющим время, средства и ресурсы различных категорий, необходимые для выполнения работы, соответствующей данному участку сети. Предполагается известным, кроме того, вектор ограничений, составляющие которого указывают время и размеры средств и ресурсов, отведенные для создания всей системы. Требуется выбрать способы производства для каждого участка сети, при которых затраты времени, средств и ресурсов на разработку системы не выйдут за допустимые пределы.

Сформулированная задача может иметь неединственное решение. В тех случаях, когда одна из характеристик работ, например время ввода в строй системы или объем капиталовложений, определяет качество

разработки, построение плана сводится к условной экстремальной задаче. Требуется выбрать способы производства для каждой работы сети, обеспечивающие наименьшее время ввода системы в строй (или наименьшие суммарные затраты на разработку) по сравнению со временем (или затратами), определяемым любым другим планом, при котором соблюдаются заданные ограничения по ресурсам и средствам.

Важных ограничивающих факторов обычно немного, а число работ в сети сложной системы, как правило, весьма велико. Поэтому следует ожидать, что сетевые методы могут оказаться полезными и при решении сформулированных задач.

## § 11. Транспортная задача по критерию времени

В ряде задач организации перевозок качество плана оценивается максимальным временем, затраченным на перевозки.

Обозначим через  $t_{ij}$  время, необходимое на перевозку продукта из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт потребления. Лучшим будем считать план, самая продолжительная перевозка которого имеет минимальную длительность.

Планирование по минимуму времени осуществления наиболее длительной перевозки актуально, например, при перевозке скоропортящихся продуктов, при вывозке зерна на заготовительные пункты во время хлебоуборочной кампании.

При выбранном показателе качества задача планирования перевозок, при которых обеспечивается удовлетворение спроса пунктов потребления  $B_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) продуктом, производимым в пунктах  $A_i$  в количестве  $a_i$  единиц ( $i=1, \dots, m$ ), формулируется следующим образом.

Требуется выбрать план перевозок  $X$  (набор чисел  $x_{ij}$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ ), для которого время  $t(X)$  наиболее продолжительной перевозки

$$t(X) = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij} \quad (11.1)$$

достигает минимума при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (11.4)$$

Выражение (11.1) означает наибольшее из времен  $t_{ij}$  перевозок из пунктов  $A_i$  в пункты  $B_j$ , отвечающих коммуникациям, по которым запланированы ненулевые перевозки ( $x_{ij} > 0$ ).

Задача (11.1)—(11.4) не укладывается в рамки линейного программирования, так как  $t(X)$  — нелинейная функция своих переменных  $x_{ij}$ . Тем не менее, как можно показать, решение этой задачи может быть сведено к последовательному решению серии обычных транспортных задач типа  $T$ , где  $c_{ij}$  принимает значения 0 или 1. При этом оптимальный базис предыдущей задачи может быть использован в качестве исходного базиса последующей задачи. Задача (11.1)—(11.4) может быть также сведена к серии задач о максимальном потоке (см. [54]).

Таким же образом меняется схема решения других транспортных задач, рассмотренных в настоящем параграфе, если заменить принятые показатели качества плана длительностью наиболее продолжительной перевозки. Более того, можно утверждать, что решение любой задачи линейного программирования, в которой линейная форма  $L(X)$  заменена нелинейной функцией  $t(X) = \max_{x_{ij} > 0} t_j$ , где вектор  $t = \{t_j\}$  фиксирован, сводится к

решению некоторой последовательности задач линейного программирования.

## § 12. Планирование производства и перевозок

**12.1.** Рассмотрим несколько обобщений классической транспортной задачи. Для их решения могут быть приспособлены матричные и сетевые методы вычисления оптимальных планов транспортных задач. Однако

особая структура этих задач заставляет отдавать предпочтение более экономным специальным методам.

Будем здесь называть классическую транспортную задачу (1.1)—(1.4) задачей I, а транспортную задачу с ограниченными пропускными способностями (1.1)—(1.3), (1.11) — задачей II. К задаче II могут быть сведены и более сложные модели планирования производства и перевозок.

Пусть в  $j$ -м пункте потребления ( $B_j$ ) спрос возрос на  $\beta_j$ . Чтобы удовлетворить спрос, необходимо увеличить производство в некоторых пунктах  $A_i$  и ввести дополнительные перевозки. Будем рассматривать ситуации, в которых естественно сохранить план перевозок  $\{x_{ij}\}$ , установленный ранее в результате решения задачи II. Требуется разработать задания пунктам производства и план дополнительных перевозок, чтобы, учитывая ограниченные возможности расширения производства в каждом пункте и ограниченную пропускную способность транспорта, удовлетворить спрос при минимальных затратах.

Переведем задачу на формальный язык.

Введем следующие обозначения:

- $p_i \geq 0$  — затраты на дополнительное производство единицы продукта в  $i$ -м пункте \*),
- $y_i$  — величина дополнительного производства в  $i$ -м пункте;
- $f_i$  — ограничение по возможностям расширения производства в  $i$ -м пункте;
- $\gamma_{ij}$  — дополнительное количество единиц продукта, перевозимое из  $i$ -го пункта в  $j$ -й;
- $r_{ij}$  — ограничение пропускной способности транспорта по линии  $(i, j)$ , учитывающее ранее установленный график перевозок ( $\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - x_{ij}$ , где  $x_{ij}$  — перевозка в направлении  $(i, j)$ , установленная в результате решения задачи II);

---

\*) Здесь и в дальнейшем под затратами на дополнительное производство и расширение пропускной способности транспорта подразумеваются приведенные затраты, при расчете которых учтены коэффициенты, позволяющие сравнивать и суммировать затраты (текущие и капиталовложения) в сопоставимых единицах.

$c_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $d_{ij}$  имеют тот же смысл, что и в задачах I и II.

Во введенных обозначениях задача формулируется следующим образом.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = L(y_i, y_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i y_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \quad (12.1)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = \beta_j - \text{дополнительный спрос в } j\text{-м пункте} \\ (j=1, \dots, n);$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = y_i - \text{дополнительное производство в } i\text{-м пункте} \\ (i=1, 2, \dots, m);$$

$$y_i \leq f_i - \text{ограничение по возможностям расширения} \\ \text{производства в } i\text{-м пункте} \\ (i=1, 2, \dots, m);$$

$$0 \leq y_{ij} \leq d_{ij} - \text{ограничения по транспорту.}$$

Нетрудно видеть, что эта задача (мы ее будем называть задачей III) имеет ту же структуру, что и задача II. Действительно, исключая переменные  $y_i$ , получаем следующую задачу.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + p_i) y_{ij} \quad (12.2)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = \beta_j, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} \leq f_i, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

$$0 \leq y_{ij} \leq d_{ij}, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n.$$

Здесь естественно полагать

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \leq \sum_{i=1}^m f_i. \quad (12.3)$$

Введение фиктивного пункта спроса с объемом потребления, равным

$$\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad (12.4)$$

позволяет свести эту задачу к задаче II. Величина  $\beta_{n+1}$  определяет неиспользованные возможности по расширению производства.

12.2. Обобщая задачу, мы предполагали, что увеличение спроса, расширение производства и введение дополнительных перевозок не будут нарушать установленных перевозок  $x_{ij}$  (соответствующих решению задачи II).

Вообще говоря, это нецелесообразно. Изменение графика перевозок может иметь существенный экономический эффект. Задача в этом случае будет отличаться от предыдущей тем, что в качестве переменных придется рассматривать не дополнительные перевозки  $y_{ij}$ , а суммарные перевозки  $z_{ij}$  из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт потребления. Соответственно изменяются и условия задачи. При сохранении ранее введенных обозначений формальная структура задачи (назовем ее задачей IV) может быть представлена следующим образом. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = L(y_i, z_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i y_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} z_{ij} \quad (12.5)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = b_j + \beta_j - \text{спрос в } j\text{-м пункте } (j=1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq a_i + y_i - \text{производство в } i\text{-м пункте } (i=1, 2, \dots, m),$$

$$0 \leq z_{ij} \leq d_{ij} - \text{ограничения по пропускной способности транспорта } (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n),$$

$$0 \leq y_i \leq f_i - \text{ограничение по возможностям расширения производства в } i\text{-м пункте } (i=1, 2, \dots, m).$$

В ряде случаев естественно потребовать, чтобы по новому плану перевозок из каждого пункта производства вывозилось не менее чем по старому плану (до расширения производства):

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12.6)$$

Тогда эта задача, так же как и предыдущая, сводится к транспортной задаче с ограничениями по пропускным способностям (задача II).

Сведение задачи IV к задаче II производится следующим образом. Введем  $m$  дополнительных переменных

$$z_{i, n+1} = a_i + f_i - \sum_{j=1}^n z_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Величина  $z_{i, n+1}$  определяет неиспользованные возможности по расширению производства в  $i$ -м пункте.

После исключения переменных  $y_i$  задача IV может быть записана в следующем виде. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (p_i + c_{ij}) z_{ij} \quad (12.7)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^m (a_k + f_k) - \sum_{i=1}^n (b_i + \beta_i) = \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{i=1}^n \beta_i = \beta_{n+1} & \text{при } j = n+1, \end{cases} \quad (12.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12.9)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \begin{cases} d_{ij} & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ f_i & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = n+1. \end{cases} \quad (12.10)$$

Если система чисел  $\{z_{ij}\}$  является решением задачи (12.7)—(12.10), то оптимальный план производства и перевозок задачи IV определяется набором чисел  $\{y_i, z_{ij}\}$ , где

$$y_i = f_i - z_{i, n+1} = \sum_{j=1}^n z_{ij} - a_i.$$

Условия (12.6) и  $p_i \geq 0$  существенно использованы при исключении переменных  $y_i$ . Если условия (12.6) не могут быть приняты, задача усложняется. Однако в этом случае она укладывается в модель, рассматриваемую в п. 12.4.

**12.3.** К естественному усложнению моделей, рассмотренных выше, приводит следующее обстоятельство.

Может оказаться, что суммарные расходы уменьшатся, если часть средств будет направлена на расширение пропускной способности транспорта.

Приведенная ниже более широкая постановка задачи планирования указывает целесообразный подход к распределению капиталовложений.

Пусть переменная  $w_{ij}$  характеризует увеличение пропускной способности транспорта, обеспечивающего перевозки из  $i$ -го пункта в  $j$ -й, а  $q_{ij}$  определяет затраты на увеличение пропускной способности линии  $(i, j)$  на единицу перевозимого продукта. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, можно сформулировать следующую задачу.

Требуется минимизировать линейную форму  $n+2mn$  переменных  $(y_i, z_{ij}, w_{ij})$

$$L = L(y_i, z_{ij}, w_{ij}) = \sum_{i=1}^m p_i y_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} z_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m q_{ij} w_{ij} \quad (12.11)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = b_j + \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.12)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq a_i + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12.13)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq d_{ij} + w_{ij}, \quad (12.14)$$

$$0 \leq y_i \leq f_i, \quad (12.15)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad (12.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, удобно рассматривать два случая в зависимости от того, выполняются условия (12.6) или нет. Пусть вначале требования (12.6) приняты. Тогда, вводя дополнительные переменные  $z_{i, n+1}$  и исключая переменные  $y_i$ , приходим к следующей записи задачи. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (p_i + c_{ij}) z_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} w_{ij} \quad (12.17)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{l=1}^n \beta_l = \beta_{n+1} & \text{при } j = n+1, \end{cases} \quad (12.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12.19)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq$$

$$\leq \begin{cases} d_{ij} + w_{ij}, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ f_i, & i = 1, \dots, m, \quad j = n+1, \end{cases} \quad (12.20)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12.21)$$

Будем эту задачу называть задачей V. Если система чисел  $(z_{ij}, w_{ij})$  является решением задачи (12.17) — (12.21), то оптимальный план производства и перевозок задачи (12.11) — (12.16) при условиях (12.6) определяется набором чисел  $\{y_i, z_{ij}, w_{ij}\}$ , где  $y_i = f_i - z_{i, n+1}$ .

**12.4.** Условия (12.6) не всегда приемлемы. В частности, если имеется возможность существенного расширения производства в районах, близких к потребителю, то

может оказаться целесообразным сократить перевозки из дальних пунктов производства по сравнению с запланированными ранее (до увеличения спроса и расширения производства).

Не будем теперь требовать выполнения условий (12.6). Тогда, вводя дополнительные переменные  $v_i$  и  $z_{i, n+1}$  и исключая переменные  $y_i$ , можно придать задаче (мы не будем называть задачей VI) следующий вид.

Требуется обратить в минимум линейную форму

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^m p_i (v_i - z_{i, n+1}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} w_{ij} \quad (12.22)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = \begin{cases} b_j + \beta_j & \text{при } j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^m f_k - \sum_{i=1}^n \beta_i = \beta_{n+1}, & j = n+1, \end{cases} \quad (12.23)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_{ij} = a_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12.24)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq$$

$$\leq \begin{cases} d_{ij} + w_{ij}, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ f_i + v_i, & i = 1, \dots, m, \quad j = n+1, \end{cases} \quad (12.25)$$

$$v_i \geq 0, w_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.26)$$

Переменные  $v_i$  определяют возможное сокращение вывоза из  $i$ -го пункта. Если сокращение вывоза из  $i$ -го пункта связано с дополнительными расходами, то коэффициент при  $v_i$  в линейной форме (12.22) должен быть соответствующим образом увеличен.

Если система чисел  $\{z_{ij}, v_i, w_{ij}\}$  является решением задачи VI, то оптимальный план задачи (12.11)–(12.16), переменные которой не подчинены условиям (12.6), определяется набором чисел  $\{z_{ij}, y_i, w_{ij}\}$ , где

$$y_i = \begin{cases} f_i - z_{i, n+1} & \text{при } z_{i, n+1} \leq f_i, \\ 0 & \text{при } z_{i, n+1} > f_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Заметим, что если в задаче IV не требовать выполнения соотношений (12.6), то она укладывается в схему задачи VI при  $q_{ij}=M$ , где  $M$  — достаточно большое число.

12.5. Мы рассмотрели шесть задач, связанных с планированием производства и перевозок.

Все они оказываются частными случаями следующей общей математической схемы, которую естественно называть моделью планирования производства и перевозок однородного продукта.

Требуется обратить в минимум линейную форму переменных  $(u_{ij}, t_{ij})$

$$L = L(u_{ij}, t_{ij}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} t_{ij} \quad (12.27)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^s u_{ij} = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (12.28)$$

$$\sum_{j=1}^r u_{ij} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (12.29)$$

$$0 \leq u_{ij} \leq \delta_{ij} + t_{ij}, \quad (12.30)$$

$$t_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (12.31)$$

В приведенной ниже таблице указан конкретный смысл переменных и параметров модели планирования производства и перевозок применительно к каждой из рассмотренных ранее задач.

Числа, указанные над чертой, определяют значения соответствующего параметра при  $j=1, 2, \dots, n$ . Величины под чертой определяют значения параметра при  $j=n+1$ . Если клетка не разделена чертой, то индекс  $j$  принимает все значения от 1 до  $r$ . Индекс  $i$  во всех случаях принимает значения от 1 до  $m$ .  $M$  — достаточно большое число.

Если условия той или иной конкретной задачи непротиворечивы, то решение общей задачи при указанных значениях параметров приведет к оптимальному плану частной задачи. При этом  $t_{ij}$ , для которых  $\sigma_{ij}=M$ , окажутся равными нулю.

	$s$	$r$	$u_{ij}$	$t_{ij}$	$\gamma_{ij}$	$\sigma_{ij}$	$\lambda_i$	$\mu_j$	$\delta_{ij}$
I	$m$	$n$	$x_{ij}$	—	$c_{ij}$	—	$a_i$	$b_j$	$\infty$
II	$m$	$n$	$x_{ij}$	$t_{ij}$	$c_{ij}$	$M$	$a_i$	$b_j$	$d_{ij}$
III	$m$	$n+1$	$y_{ij}$	$t_{ij}$	$\frac{c_{ij} + p_i}{0}$	$\frac{M}{0}$	$f_i$	$\frac{\beta_j}{\beta_{n+1}}$	$\frac{\tilde{d}_{ij}}{\infty}$
IV	$m$	$n+1$	$z_{ij}$	$t_{ij}$	$\frac{c_{ij} + p_i}{0}$	$M$	$a_i + f_i$	$\frac{b_j + \beta_j}{\beta_{n+1}}$	$\frac{d_{ij}}{f_i}$
V	$m$	$n+1$	$z_{ij}$	$w_{ij}$	$\frac{c_{ij} + p_i}{0}$	$\frac{q_{ij}}{M}$	$a_i + f_i$	$\frac{b_j + \beta_j}{\beta_{n+1}}$	$\frac{d_{ij}}{f_i}$
VI	$m$	$n+1$	$z_{ij}$	$\frac{w_{ij}}{v_i}$	$\frac{c_{ij}}{-p_i}$	$\frac{q_{ij}}{p_i}$	$a_i + f_i$	$\frac{b_j + \beta_j}{\beta_{n+1}}$	$\frac{d_{ij}}{f_i}$

Заметим, что во всех рассмотренных моделях коэффициенты  $\sigma_{ij}$  по своему смыслу неотрицательны. Этот факт оказывается существенным для построения специального экономного метода решения задачи линейного программирования подобного вида [12].

ГЛАВА 2

**РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА  
И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ  
(практические задачи)**

---

Классическая транспортная задача обобщается в различных направлениях. Одним из наиболее часто встречающихся обобщений является так называемая распределительная задача. В настоящей главе рассматриваются практические задачи, приводящие к распределительной задаче или к некоторым ее модификациям.

**§ 1. Планирование перевозки взаимозаменяемых продуктов**

Задача о перевозке неоднородных продуктов с учетом их взаимозаменяемости в общем случае не сводится ни к транспортной ни к распределительной задаче. Это не относится к частным задачам планирования перевозок неоднородных взаимозаменяемых продуктов, одну из которых мы рассмотрим ниже.

Пусть требуется составить план перевозок топлива разных сортов из пунктов производства  $A_1, A_2, \dots, A_m$  в пункты потребления  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Обозначим через  $b_j$  спрос на топливо  $j$ -го пункта потребления. Будем выражать спрос в приведенных единицах (например, в калориях теплоотдачи).

Под топливом разных сортов здесь подразумевается не только горючее разных видов, но и топливо одной и той же марки, добываемое в разных районах. Пункт добычи нескольких различных сортов топлива будем рассматривать как несколько различных пунктов производства. Таким образом, число пунктов производства и число сортов топлива в этой задаче совпадают. Пусть в пункте  $A_i$  количество добытого топлива  $i$ -го сорта равно  $a_i$  тонн.

В общем случае коэффициент теплоотдачи одних и тех же марок топлива у разных потребителей различен. Различные условия использования топлива (разные топки, различный к. п. д. оборудования и т. д.) обуславливают разную теплоотдачу топлива. Поэтому коэффициенты приведения  $\lambda_{ij}$   $i$ -го сорта топлива относительно  $j$ -го потребителя зависят, вообще говоря, не только от сорта топлива, но и от условий его использования каждым потребителем.

Обозначим через  $c_{ij}$  затраты на перевозку 1 т топлива  $i$ -го сорта к  $j$ -му пункту, а через  $x_{ij}$  — количество топлива  $i$ -го сорта, поставляемое  $j$ -му потребителю. Задача заключается в составлении плана перевозок, обеспечивающего удовлетворение спроса всех потребителей в тепловой энергии наиболее экономным образом.

Формально задача записывается так. Требуется образовать в минимум линейную форму

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Линейная форма (1.1) определяет суммарные транспортные издержки на перевозку топлива. Ограничения (1.2) означают, что объем доставленного в каждый пункт потребления топлива в приведенных единицах теплоотдачи должен равняться спросу этого пункта. Условия (1.3) означают, что общий объем топлива, направляемый во все пункты потребления из  $i$ -го пункта производства, не превышает запасов топлива  $i$ -го сорта.

Задача вида (1.1) — (1.4) называется *распределительной*. В частном случае, когда коэффициенты приведения  $\lambda_{ij}$  одни и те же для разных пунктов потребления или,

в более общем случае, когда  $\lambda_{ij} = \alpha_i \beta_j$ , где  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  — некоторые положительные постоянные, распределительная задача сводится к классической транспортной задаче.

В распределительной задаче, так же как и в транспортной, нередко возникает необходимость учитывать двусторонние ограничения на переменные. В терминах задачи, приведенной в этом пункте, двусторонние ограничения переменных могут истолковываться, например, как ограничения пропускных способностей коммуникаций и нецелесообразность перевозок недогруженным транспортом.

В тех случаях, когда такие ограничения должны учитываться, следует заменять условия (1.4) неравенствами вида

$$\underline{x}_{ij} \leq x_{ij} \leq \bar{x}_{ij}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Задача (1.1)—(1.3), (1.5) называется распределительной задачей с двусторонними ограничениями.

## § 2. Распределение изделий между предприятиями

Название распределительной задачи, по-видимому, связано со следующей задачей распределения  $m$  видов изделий между  $n$  предприятиями.

Пусть  $c_{ij}$  — себестоимость производства единицы  $i$ -го изделия на  $j$ -м предприятии — не зависит от объема производства. Обозначим через  $x_{ij}$  число единиц  $i$ -го изделия, которое должно быть произведено на  $j$ -м предприятии в течение планового периода. Тогда суммарные затраты на изготовление всех изделий выражаются линейной формой

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (2.1)$$

Общий объем производства по каждому изделию должен соответствовать плановому заданию

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Чтобы план был реален, необходимо учесть выделяемые для выполнения программы производственные

мощности на каждом предприятии. Обычно учет выделяемых мощностей сводится к временным ограничениям. Пусть  $\tau_j$  — число часов работы  $j$ -го предприятия, которое может быть выделено в течение планового периода на производство всех рассматриваемых видов изделий, а  $t_{ij}$  — время, необходимое для производства единицы  $i$ -й продукции на  $j$ -м предприятии. Тогда условия, ограничивающие загрузку каждого из предприятий, записываются в виде неравенств

$$\sum_{i=1}^m t_{ij} x_{ij} \leq \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Рациональное распределение изделий между предприятиями сводится, таким образом, к вычислению параметров  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ ), для которых достигается минимум линейной формы (2.1) при условиях (2.2), (2.3) и естественных неравенствах

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Мы пришли к распределительной задаче.

Последняя модель может быть также интерпретирована в терминах задачи о рациональном использовании машинно-тракторного парка в колхозах и совхозах [15], задачи о распределении башенных кранов между строительными площадками [29], задачи об оптимальной загрузке оборудования и т. д.

### § 3. Распределение самолетов между воздушными линиями

Одно из первых приложений распределительной задачи, опубликованных в литературе, связано с распределением самолетов между воздушными линиями [41]. Имеется  $n$  типов самолетов, которые должны быть использованы для перевозки пассажиров по  $m$  линиям. Число самолетов  $j$ -го типа равно  $b_j$ .

Самолеты разных типов по-разному приспособлены для эксплуатации на той или иной воздушной линии. Из-за недостаточной дальности полета некоторые самолеты не могут быть эффективно использованы на линиях

большой протяженности. Самолеты разных типов имеют различное число посадок в пути. На некоторых линиях не используется полностью коммерческая грузоподъемность самолетов. Все это приводит к тому, что месячный объем перевозок и расходов на один самолет различен для разных типов самолетов и разных воздушных линий.

Исходя из данных о себестоимости пассажирокилометра и коммерческой загрузки каждого типа самолетов на каждой авиалинии, устанавливаются:

— месячные объемы  $a_{ij}$  перевозок пассажиров одним самолетом  $j$ -го типа по  $i$ -й воздушной линии;

— месячные затраты  $c_{ij}$  на эксплуатацию одного самолета  $j$ -го типа на  $i$ -й авиалинии. Предполагается также известным число пассажиров  $a_i$ , подлежащих перевозке в течение месяца по  $i$ -й линии. Задача заключается в распределении самолетов по  $m$  авиалиниям для перевозки заданного количества пассажиров при минимальных затратах.

Обозначим через  $x_{ij}$  число самолетов  $j$ -го типа на  $i$ -й авиалинии. Суммарные месячные затраты на эксплуатацию самолетов выражаются линейной формой

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}. \quad (3.1)$$

Самолеты должны быть распределены по авиалиниям так, чтобы обеспечить перевозку по  $i$ -й линии не менее  $a_i$  пассажиров в месяц. Это значит, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Общее число самолетов  $j$ -го типа, подлежащих распределению, равно по условию  $b_j$ . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Кроме того, очевидно,

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

Задача распределения самолетов по авиалиниям свелась, таким образом, к минимизации линейной формы (3.1) при условиях (3.2)—(3.4). Мы снова пришли к распределительной задаче.

По физическому смыслу параметры  $x_{ij}$  в этой задаче, впрочем, как и в задаче предыдущего пункта, должны быть целыми числами. В отличие от классической транспортной задачи в распределительной задаче целочисленность решения не гарантируется, если это условие не включено в систему ограничений. Нарушение требования целочисленности в задачах подобного рода, когда неравные нулю параметры  $x_{ij}$  принимают, вообще говоря, немалые значения, не приводит, как правило, к существенным отклонениям от оптимума. При дробных  $x_{ij}$  в качестве компонент решения задачи следует принимать ближайшие к ним целые числа. Требование целочисленности оказывается существенным, если значения  $x_{ij}$  ограничены малыми числами.

#### § 4. Регулирование парка вагонов

Одно из важных условий экономичной эксплуатации железных дорог заключается в рациональном регулировании парка вагонов не только в пределах дороги, но и в пределах станции или узла. Под регулированием парка вагонов понимают распределение вагонов разных типов (крытых, полувагонов, платформ с разным числом осей) под различные грузы.

Пусть  $x_{ij}$  — число вагонов  $j$ -го типа, занаряженных под  $i$ -й груз;  $a_{ij}$  — нормы нагрузки одного вагона  $j$ -го типа  $i$ -м грузом;  $a_i$  — объем отправляемого груза в тоннах,  $b_j$  — число вагонов  $j$ -го типа;  $c_{ij}$  — эксплуатационные расходы на погрузку  $i$ -го груза в один вагон  $j$ -го типа.

Задача рационального регулирования парка вагонов сводится, таким образом, к вычислению параметров  $x_{ij}$ , минимизирующих линейную форму

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Линейная форма (4.1) определяет суммарные затраты на погрузку. Условия (4.2) означают, что весь зарождающийся грузопоток по каждому виду груза должен быть освоен. Неравенства (4.3) означают, что погрузка вагонов каждого типа ограничивается их наличием.

В [38] к моделям вида (4.1)—(4.4) сводятся задачи планирования работы речного флота. При анализе практических проблем Волжского объединенного пароходства к распределительной задаче сведены задачи распределения однородного грузового флота по грузовым линиям, задачи расстановки пассажирского флота по линиям, задачи распределения по объектам работы перегрузочных машин, дноуглубительных снарядов и т. д.

## § 5. Оптимизация структуры энергетического баланса

5.1. Ряд важных задач, связанных с определением рациональной структуры энергетического баланса, сводится к распределительной задаче [22].

Топливо-энергетический баланс определяет комплексную увязку производства и использования энергетических ресурсов и энергии всех видов как по отраслям и районам страны, так и по народному хозяйству в целом. Основная задача разработки перспективных энергетических балансов заключается в выборе рациональных пропорций производства и использования энергетических ресурсов и энергии всех видов, при которых обеспечивается минимум народнохозяйственных затрат. В простейшем случае задача сводится к распределению добычи отдельных энергетических ресурсов между потребителями (энергетическими установками), обеспечи-

вающему производству заданного количества энергии каждой установкой при минимальных суммарных затратах.

Пусть рассмотрению подлежит  $n$  видов энергетических ресурсов и  $m$  центров производства энергии. Каждый вид энергетических ресурсов связывается с его сортом или с бассейном, где он добывается. Каждый энергетический центр будем связывать с установкой, преобразующей тот или иной вид ресурсов в энергию.

Введем следующие обозначения:

$x_{ij}$  — расход энергетического ресурса  $j$ -го вида  $i$ -й энергетической установкой;

$a_i$  — требуемое годовое производство энергии  $i$ -й энергетической установкой;

$b_j$  — годовая добыча (или производство или возможность получения)  $j$ -го энергетического ресурса;

$a_{ij}$  — коэффициенты топливоиспользования  $i$ -й установкой  $j$ -го ресурса, учитывающие к. п. д. преобразования энергетического ресурса и к. п. д. потребляющей установки (коэффициент  $a_{ij}$  определяет количество энергии, получаемой  $i$ -й установкой от единицы  $j$ -го ресурса);

$b_{ij}$  — затраты на производство  $i$ -й установкой единицы энергии из  $j$ -го энергетического ресурса;

$c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$  — затраты на производство  $i$ -й установкой энергии из единицы  $j$ -го ресурса.

Во введенных обозначениях задача определения оптимальной структуры энергетического баланса сводится к вычислению параметров  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ ), на которых достигается минимум линейной формы

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (5.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j \in I, \quad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.4)$$

$I$  — совокупность индексов энергетических ресурсов, добыча или запас которых ограничены.

Линейная форма (5.1) определяет суммарные затраты на производство заданного количества энергии. Ограничения (5.2) фиксируют запланированное производство энергии каждой энергетической установкой. Условия (5.3) представляют ограничения по добыче или по запасам разных энергетических ресурсов. Условия (5.3) могут быть записаны для всех  $j$ , но при этом следует полагать  $b_j = \infty$  для тех энергетических ресурсов, которые могут быть получены в неограниченном количестве.

Мы снова пришли к распределительной задаче.

5.2. Некоторые естественные изменения в постановке задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, нарушают схему распределительной задачи и приводят к определенной ее модификации [13].

Пусть различные энергетические ресурсы, рассматриваемые в предыдущем пункте, сводятся к различным сортам угля из одного бассейна. Доля каждого сорта в добываемом угле предполагается известной. Требуется определить объем добычи (или доставки) угля и план распределения разных сортов угля между энергетическими установками, чтобы обеспечить их потребности наиболее экономным путем.

В отличие от задачи предыдущего пункта, объем добычи или доставки каждого сорта угля (и, следовательно, суммарный объем топлива) предполагается здесь не заданным, а искомым.

Обозначим через  $v$  требуемый объем добычи угля, а через  $\beta_j$  долю угля  $j$ -го сорта  $\left(\sum_{j=1}^n \beta_j = 1\right)$ . Сохраняя обозначения предыдущего пункта и подразумевая под  $j$ -м энергетическим ресурсом  $j$ -й сорт топлива, приходим к следующей задаче.

Требуется вычислить переменные  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) и  $v$ , обращающие в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (5.5)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq \beta_j v, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = v, \quad (5.8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Линейная форма (5.5) и условия (5.6), (5.7) истолковываются так же, как и в предыдущем пункте. Равенство (5.8) означает, что распределению между установками подлежит только добытый (или доставленный) по плану уголь.

Нетрудно видеть, что неравенства (5.7) можно заменить равенствами, а условие (5.8) оказывается излишним. К этому выводу можно прийти, если просуммировать неравенство (5.7) по  $j$  от 1 до  $n$  и учитывая, что

$\sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ , сравнить полученный результат с соотношением (5.8). Задача принимает вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.9)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} &= a_i, & i &= 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} - \beta_j v &= 0, & j &= 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.11)$$

Задача добычи и распределения сортов угля отличается, таким образом, от распределительной задачи дополнительным переменным  $v$ .

## § 6. Распределение посевной площади

Рассмотрим задачу о наивыгоднейшем распределении посевной площади между сельскохозяйственными культурами. Анализ этой модели связан с некоторой модификацией распределительной задачи.

Пусть в состав района входит  $m$  колхозов, посевные площади которых равны соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Согласно плану в районе должно производиться  $n$  культур в соотношении  $b_1 : b_2 : \dots : b_n$ . Различие почв и климатических условий определяет различную пригодность отдельных участков для выращивания тех или иных культур. Пусть ожидаемый урожай  $j$ -й культуры в  $i$ -м колхозе с одного гектара площади равен  $a_{ij}$ . Необходимо выяснить, какую часть посевной площади каждый колхоз должен отвести под ту или иную культуру, чтобы обеспечить максимальный урожай при предписанном соотношении культур.

Пусть  $x_{ij}$  — число гектаров, которое  $i$ -й колхоз должен отвести под  $j$ -ю культуру. Тогда

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.1)$$

— общая посевная площадь  $i$ -го колхоза. Ожидаемый урожай  $j$ -й культуры со всей посевной площади района равен

$$z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Задача об оптимальном распределении посевных площадей сводится, таким образом, к такому подбору системы чисел

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

при котором имеют место условия (6.1), а система отношений

$$\frac{z_1}{b_1} = \frac{z_2}{b_2} = \dots = \frac{z_n}{b_n}$$

достигает максимума.

Обозначим общее значение отношений через  $v$ . Тогда задача о наивыгоднейшем распределении посевных площадей между сельскохозяйственными культурами сводится к максимизации переменной

$$v \quad (6.2)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} - b_j v = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.5)$$

Задача (6.2) — (6.5) отличается от распределительной задачи дополнительной переменной  $v$  и более простой записью линейной формы.

Задача о распределении посевных площадей усложняется, если возникает необходимость в учете дополнительных факторов, ограничивающих возможности обработки тех или иных культур в различных хозяйствах. Пусть, например, в некоторых колхозах земля поливная и  $d_{ij}$  — норма расхода воды для  $j$ -й культуры на участке  $i$ -го колхоза. Дополнительные условия, учитывающие ограниченные возможности орошения, записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}x_{ij} \leq d_i, \quad i \in I, \quad (6.6)$$

где  $d_i$  — производительность источников орошения в  $i$ -м колхозе,  $I$  — множество номеров колхозов с орошаемым земледелием.

Точно таким же образом записываются условия, фиксирующие ограничения по автотракторному парку и другой технике и по рабочей силе для обработки выращиваемых в районе культур.

При решении задачи о распределении посевных площадей в масштабе области, края или республики возникает необходимость более или менее равномерного распределения всех или некоторых культур по отдельным районам (группам колхозов).

Такое требование исключает излишние перевозки. Разобьем множество  $\{1, 2, \dots, m\}$  номеров колхозов по территориальному признаку на несколько групп  $I_1, I_2, \dots, I_s$  и обозначим через  $g_{jk}$  потребности  $k$ -го района ( $k$ -й группы колхозов) в  $j$ -й культуре. Чтобы полностью удовлетворить потребности отдельных районов в каждой культуре, необходимо при распределении посевных площадей дополнительно учесть требования

$$\sum_{i \in I_k} a_{ij} x_{ij} \geq g_{jk}, \quad j \in J, k = 1, 2, \dots, s. \quad (6.7)$$

Здесь  $J$  — множество номеров культур, минимальные потребности в которых в районах, где они возделываются, зафиксированы.

## § 7. Задача о смеси

К некоторым обобщениям распределительной задачи приводят проблемы оптимального использования сырья в различных процессах нефтепереработки.

Рассмотрим задачу рационального смешивания нефтепродуктов для получения авиационных бензинов с заданными техническими характеристиками [47]. Пусть требуется наиболее экономным образом изготовить  $m$  сортов бензина  $A_1, \dots, A_m$  путем смешивания  $n$  сортов нефтепродуктов  $B_1, \dots, B_n$ . Запасы каждого нефтепродукта и их технические характеристики предполагаются известными. Каждый сорт изготовленного бензина должен удовлетворять заданным техническим требованиям. Технические характеристики бензина (октановое число, наличие примесей и др.) вычисляются как средневзвешенные значения соответствующих показателей исходных нефтепродуктов. Весовыми коэффициентами являются относительные количества этих продуктов в смеси. Одни показатели сортности бензина, как, например, октановое число, должны быть ограничены снизу, другие, как, например, степень сжатия, должны ограничиваться сверху.

Введем следующие обозначения:

- $b_j$  — заданные размеры запасов нефтепродукта  $B_j$ ;
- $b_{jk}$  — значение  $k$ -й технической характеристики нефтепродукта  $B_j$ ;
- $a_{ik}$  — ограничение  $k$ -й характеристики бензина  $A_i$  (для одних характеристик это ограничение снизу, для других — сверху);
- $c_i$  — себестоимость производства одной тонны бензина  $A_i$ ;
- $x_{ij}$  — количество нефтепродукта  $B_j$ , используемое для изготовления бензина  $A_i$ .

Общий объем производства бензина  $A_i$  равен

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Следовательно, суммарные затраты на производство бензина всех  $m$  сортов выражаются линейной формой

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i x_{ij}. \quad (7.1)$$

Ограничения по запасам различных нефтепродуктов представляют собой условия вида

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

Технические условия по разным показателям записываются для каждого сорта бензина в виде неравенств

$$\sum_{j=1}^n b_{jk} \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \leq a_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, s. \quad (7.3)$$

Как уже указывалось, сортность бензина по некоторым характеристикам ограничивается не сверху, а снизу. Соответствующие условия могут быть также записаны в виде неравенств (7.3), только знаки  $b_{jk}$  и  $a_{ik}$  должны быть здесь заменены на обратные.

Условия (7.3) удобнее записывать в виде системы неравенств

$$\sum_{j=1}^n d_{ijk} x_{ij} \leq 0, \quad (7.4)$$

где

$$d_{ijk} = b_{jk} - a_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, s.$$

Таким образом, составление наиболее экономной программы производства бензина разных сортов, обладающих заданными техническими характеристиками, путем смешивания имеющихся нефтепродуктов сводится к вычислению переменных

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.5)$$

для которых достигается минимум линейной формы (7.1) при условиях (7.2) и (7.4).

При  $s=1$  мы снова имеем дело с распределительной задачей.

## § 8. Геодезическая задача

8.1. Особенность матрицы условий распределительной задачи заключается в том, что в каждом ее столбце всего два ненулевых элемента. На этом основаны специальные методы решения распределительной задачи. Принципы построения подобных методов могут быть распространены для решения других задач с матрицами условий, содержащими в каждой строке не более двух ненулевых элементов. Одна из таких задач будет рассмотрена ниже.

Пусть требуется составить наиболее экономный план построения геодезической сети. Расходы по строительству сети определяются главным образом высотами геодезических вышек и затратами на подвоз материалов к месту строительства. Предполагается, что пункты строительства намечены и задача состоит в выборе высот вышек, обеспечивающих соблюдение условий видимости при заданном рельефе местности.

Пусть  $b_{ij}$  — высота препятствия между  $j$ -й и  $i$ -й вышками, а  $d_{ij}$  и  $d_{ji}$  — расстояния до препятствия соответ-

ственно от  $j$ -й и  $i$ -й вышек. Обозначим через  $x_j$  высоту  $j$ -й вышки. Пусть, кроме того,

$$a_{ij} = \frac{d_{ij}}{d_{ij} + d_{ji}}.$$

В этих обозначениях условия видимости  $i$ -й вышки с  $j$ -й вышки записываются в виде (рис. 2.1)

$$a_{ij}x_i + a_{ji}x_j \geq b_{ij}. \quad (8.1)$$

Неравенство (8.1) должно иметь место для всех  $i, j$ , соответствующих парам вышек, для которых требуется прямая видимость.

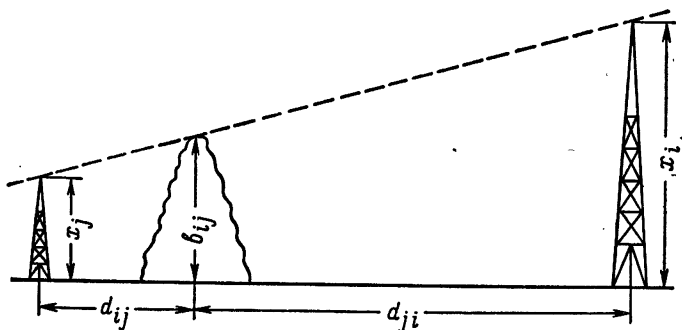


Рис. 2.1.

Затраты  $\varphi_j(x_j)$  на строительство вышки высотой  $x_j$  характеризуются нелинейной выпуклой вниз функцией высоты  $x_j$ . Затраты растут быстрее, чем увеличивается высота вышки. В [21] и [29] изменение затрат с высотой вышки аппроксимируется полиномом второй степени

$$\varphi_j(x_j) = a_j x_j^2 + b_j x_j + c_j.$$

Коэффициенты  $a_j$ ,  $b_j$  и  $c_j$  зависят от транспортных издержек на подвоз материалов к месту строительства  $j$ -й вышки.

Таким образом, составление экономного плана построения геодезической сети сводится к вычислению высот  $x_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), для которых достигается минимум

функция

$$R = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) \quad (8.2)$$

при условиях

$$a_{ij}x_i + a_{ji}x_j \geq b_{ij}, \quad (i, j) \in I, \quad (8.3)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (8.4)$$

где  $\varphi_j(x_j)$  — выпуклые вниз функции  $x_j$ ; множество  $I$  пар индексов  $(i, j)$  отвечает номерам пар вышек, между которыми должна быть обеспечена прямая видимость, а отрезок  $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$  определяет допустимый диапазон изменения высоты  $j$ -й вышки.

8.2. Выпуклые вниз функции  $\varphi_j(x_j)$  могут быть с любой заранее заданной степенью точности приближены выпуклыми вниз ломаными линиями. Отсюда возможность замены нелинейной задачи (8.2) — (8.4) специальной задачей линейного программирования.

Пусть наибольшая допустимая ошибка в вычислении оптимальных затрат равна  $\varepsilon$ . Разделим диапазон изменения затрат на построение  $j$ -й вышки  $\varphi_j(\bar{x}_j) - \varphi_j(\underline{x}_j)$  на  $s_j$  частей так, чтобы хорды, соединяющие соседние точки деления линии  $y_j = \varphi_j(x_j)$ , отстояли от кривой  $\varphi_j(x_j)$  (по оси ординат) не более чем на  $\varepsilon/n$ . Обозначим абсциссы точек деления  $\varphi_j(x_j)$  через  $x_j^k$  (рис. 2.2).

Будем рассматривать наряду с выпуклой функцией  $\varphi_j(x_j)$  ломаную  $\tilde{\varphi}_j(x_j)$ , совпадающую с  $\varphi_j(x_j)$  в точках  $x_j^k$ .

Уравнения прямых, которым принадлежат звенья ломаной, записываются в виде

$$y_j = \lambda_{kj}x_j + \mu_{kj}, \quad (8.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{kj} &= \frac{\varphi_j(x_j^k) - \varphi_j(x_j^{k-1})}{x_j^k - x_j^{k-1}}, \\ \mu_{kj} &= \frac{x_j^k \varphi_j(x_j^{k-1}) - x_j^{k-1} \varphi_j(x_j^k)}{x_j^k - x_j^{k-1}}, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, s_j \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Пусть

$$\tilde{R} = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j(x_j).$$

Покажем, что, заменив в задаче (8.2) — (8.4) функцию  $R$  на  $\tilde{R}$ , можно уклониться от искомого минимума не более чем на  $\varepsilon$ .

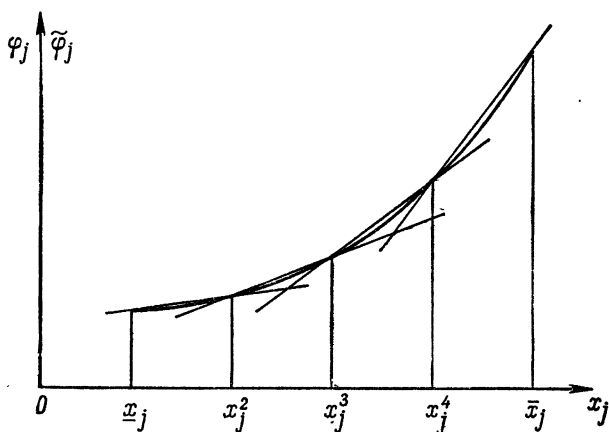


Рис. 2.2.

Из способа построения функции  $\tilde{\varphi}_j(x_j)$  и из выпуклости  $\varphi_j(x_j)$  следует, что

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) \geq \varphi_j(x_j) \quad (8.7)$$

и

$$\tilde{\varphi}_j(x_j) - \varphi_j(x_j) \leq \varepsilon/n. \quad (8.8)$$

Суммируя каждую из этих систем неравенств по  $j$  от 1 до  $n$ , получаем

$$\tilde{R}(X) \geq R(X)$$

и

$$\tilde{R}(X) - R(X) \leq \varepsilon,$$

где

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Пусть решение задачи (8.2) — (8.4) достигается в точке  $X^{(0)}$ . Тогда

$$\tilde{R}(X^{(0)}) \geq R(X^{(0)}) = \min R \quad (8.9)$$

и

$$\tilde{R}(X^{(0)}) - R(X^{(0)}) \leq \varepsilon. \quad (8.10)$$

Пусть далее  $\tilde{R}(X^{(1)}) = \min \tilde{R}$  при условиях (8.3) — (8.4). В соответствии с построением  $R(X)$  и  $\tilde{R}(X)$  и определением  $X^{(0)}$  и  $X^{(1)}$  имеем

$$\tilde{R}(X^{(0)}) \geq \tilde{R}(X^{(1)}) \quad (8.11)$$

и

$$R(X^{(0)}) \leq R(X^{(1)}). \quad (8.12)$$

Сопоставляя неравенства (8.10) и (8.11), получаем

$$R(X^{(0)}) \geq R(X^{(1)}) - \varepsilon. \quad (8.13)$$

Неравенства (8.12) и (8.13) означают, что

$$|R(X^{(1)}) - R(X^{(0)})| \leq \varepsilon. \quad (8.14)$$

Следовательно, задача вычисления  $\min R$  при условиях (8.3) — (8.4) может быть с любой заранее заданной точностью заменена задачей вычисления  $\min \tilde{R}$  при тех же условиях. Последняя же задача, как сейчас будет показано, может быть решена методами линейного программирования. Прежде всего заметим, что она может быть записана в следующей эквивалентной форме. Требуется вычислить минимум

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n y_i \quad (8.15)$$

при условиях

$$y_i = \tilde{\varphi}_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.16)$$

$$a_{ij}x_i + a_{ji}x_j \geq b_{ij}, \quad (i, j) \in I, \quad (8.17)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.18)$$

Расширим область определения задачи (8.15) — (8.18), заменив условия (8.16) на более слабые:

$$y_i \geq \tilde{\varphi}_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.19)$$

В задаче требуется минимизировать сумму переменных  $y_j$ . Следовательно, оптимальный план новой задачи должен обращать неравенства (8.19) в строгие равенства, т. е. обязан принадлежать области определения задачи (8.15) — (8.18). Приведенные соображения указывают на эквивалентность задач (8.15) — (8.18) и (8.15), (8.19), (8.17), (8.18).

Для выпуклых вниз функций  $\tilde{f}_j(x_j)$  условие (8.19) может быть переписано в виде

$$y_j \geq \lambda_{kj}x_j + \mu_{kj}, \quad k=1, 2, \dots, s_j, \quad (8.20)$$

где  $\lambda_{kj}$  и  $\mu_{kj}$  определяются по формулам (8.6), поскольку область, расположенная над выпуклой вниз ломаной, лежит выше любой прямой, содержащей звено ломаной.

Таким образом, вычисление высот вышек геодезической сети, обеспечивающих при минимальных затратах соблюдение условий видимости, сводится к следующей задаче линейного программирования. Требуется определить минимум линейной формы

$$L = \sum_{j=1}^n y_j \quad (8.21)$$

при линейных условиях

$$y_j \geq \lambda_{jk}x_j + \mu_{jk}, \quad k=1, 2, \dots, s_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (8.22)$$

$$a_{ij}x_i + a_{ji}x_j \geq b_{ij}, \quad (i, j) \in I, \quad (8.23)$$

$$\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (8.24)$$

В каждой строке условий (8.22), (8.23) содержится не больше двух ненулевых элементов. Отсюда возможность применения для анализа геодезической задачи принципов, используемых в методах решения распределительной задачи (с двусторонними ограничениями).

В настоящей главе излагаются основные свойства транспортной задачи, ее планов и решений.

### § 1. Особенности транспортной задачи

1.1. В главе 1 была приведена формальная постановка транспортной задачи и ее истолкование в терминах различных прикладных задач. В этой главе мы будем пользоваться наиболее естественной для транспортной задачи терминологией, отвечающей ее наименованию. Напомним формулировку транспортной задачи.

Пусть  $x_{ij}$  обозначает количество продукта, перевозимое из пункта производства  $A_i$  в пункт потребления  $B_j$  (величина перевозки из  $A_i$  в  $B_j$ ).

Требуется определить набор  $X$  величин  $x_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

и таких, что линейная форма

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.4)$$

достигает своего минимума,

Равенства (1.1) гарантируют полный вывоз продукта из всех пунктов производства. Равенства (1.2) обеспечивают полное удовлетворение спроса всех пунктов потребления. Условия (1.3) означают, что перевозки от пунктов потребления к пунктам производства исключены. Линейная форма (1.4) определяет величину транспортных издержек.

Величины  $a_i$  и  $b_j$  в условиях (1.1) — (1.2) всегда можно считать положительными числами. Действительно, если задача (1.1) — (1.4) имеет хотя бы один план, то неотрицательность величин  $a_i$  является следствием условий (1.1) и (1.3), а неотрицательность чисел  $b_j$  вытекает из соотношений (1.2) и (1.3). Далее, если  $a_i = 0$  ( $b_j = 0$ ), то пункт  $A_i$  ( $B_j$ ) можно исключить из рассмотрения, так как

$$x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{in} = 0 \quad (x_{1j} = x_{2j} = \dots = x_{mj} = 0).$$

В дальнейшем правые части условий (1.1) — (1.2) будут всегда предполагаться положительными числами.

Транспортная задача (1.1) — (1.4) является задачей линейного программирования, записанной в канонической форме (см. [52]). Число переменных задачи  $n \cdot m$ , число условий-равенств  $m + n$ .

Переменные  $x_{ij}$  транспортной задачи удобно нумеровать с помощью двух индексов. Поэтому план  $X$  задачи (т. е. набор величин  $x_{ij}$ , удовлетворяющих условиям (1.1) — (1.3)) целесообразно записывать в виде матрицы (а не вектора, как в общей задаче линейного программирования)

$$X = \| x_{ij} \|_{m, n} = \left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{array} \right\|.$$

План транспортной задачи иногда называют *планом перевозок*, а его элементы — *перевозками*. Как обычно, план перевозок, обращающий в минимум суммарные транспортные издержки, называется *оптимальным планом* или *решением* транспортной задачи.

Совокупность величин  $c_{ij}$ , как и планы транспортной задачи, удобно записывать в виде матрицы

$$C = \| c_{ij} \|_{m, n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

которую принято называть *матрицей транспортных издержек*.

1.2. Иногда бывает полезно записывать условия (1.1), (1.2) транспортной задачи в векторной форме. Обозначим через  $P_{ij}$  вектор, компоненты которого состоят из коэффициентов при переменной  $x_{ij}$  в условиях (1.1), (1.2). Размерность вектора  $P_{ij}$ , совпадающая с числом условий (1.1), (1.2), равна  $n+m$ . Поскольку переменная  $x_{ij}$  входит лишь в  $i$ -е уравнение системы (1.1) и в  $j$ -е уравнение системы (1.2), причем коэффициенты при ней в обоих уравнениях равны единице, то вектор  $P_{ij}$  имеет вид

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ m+j \\ \\ m+n \end{array}.$$

Другими словами  $P_{ij}$  является  $(n+m)$ -мерным вектором,  $i$ -я и  $(m+j)$ -я компоненты которого равны единице, а остальные составляющие — нулю. Каждый такой вектор соответствует коммуникации, связывающей некоторый пункт производства с каким-то пунктом потребления.

В частности, вектор  $P_{ij}$  соответствует коммуникации между  $A_i$  и  $B_j$ . Поэтому векторы  $P_{ij}$  естественно называть *векторами коммуникаций*. Введем также вектор

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

составленный из правых частей условий (1.1), (1.2). Этот вектор будем в дальнейшем называть вектором *производства — потребления*. Теперь можно переписать условия (1.1), (1.2) в векторной форме

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} P_{ij} = P. \quad (1.5)$$

Если пользоваться терминологией общей задачи линейного программирования, то векторы  $P_{ij}$  следует называть векторами условий, а вектор  $P$  — вектором ограничений задачи. Как мы видели, векторы условий транспортной задачи имеют чрезвычайно простую структуру. Это обстоятельство определяет важные специфические особенности транспортной задачи и дает возможность строить сравнительно простые методы ее анализа.

В ряде случаев оказывается удобным графический способ задания транспортной задачи. На плоскости отмечаются пункты производства  $A_i$  и пункты потребления  $B_j$ ; каждый пункт производства соединяется с каждым пунктом потребления направленным отрезком (коммуникацией). На рис. 3.1 изображена транспортная задача с двумя пунктами производства и тремя пунктами потребления. Около каждого пункта задачи указывается соответствующий объем производства или потребления.

Отрезок  $\overrightarrow{A_i B_j}$ , соединяющий пункты  $A_i$  и  $B_j$ , направлен из пункта производства в пункт потребления, что

указывает на возможность перевозки только в одном направлении. Составить план перевозок — это значит указать величину перевозки по каждой коммуникации таким образом, чтобы сумма перевозок, направляющихся в  $A_i$ , равнялась  $a_i$ , а сумма перевозок, направляемых в  $B_j$ , составляла  $b_j$  единиц продукта. На рис. 3.1 отмечен один

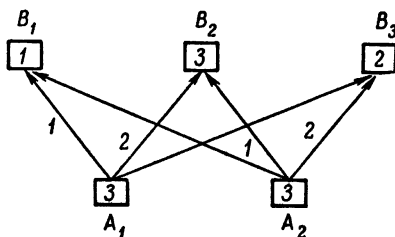


Рис. 3.1.

из планов перевозок. Величины перевозок стоят слева от соответствующих коммуникаций. Если около какой-то коммуникации величина перевозки не поставлена, то это указывает на отсутствие транспортировки по данной коммуникации. В дальнейшем мы будем использовать графический способ изображения транспортной задачи для выяснения геометрического смысла ряда ее свойств.

1.3. Как известно, задача линейного программирования разрешима не во всех случаях\*). Это относится, в частности, и к транспортной задаче. Выясним условия, необходимые и достаточные для разрешимости задачи (1.1) — (1.4).

**Теорема 1.1.** Для разрешимости транспортной задачи (1.1) — (1.4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (1.6)$$

---

\*) Задача линейного программирования называется разрешимой, если у нее имеется оптимальный план (решение), т. е. вектор, удовлетворяющий всем ограничениям задачи и придающий линейной форме экстремальное значение.

т. е. чтобы суммарный объем производства был равен суммарному объему потребления.

Доказательство. Разрешимость задачи (1.1)—(1.4) предполагает совместность системы (1.1), (1.2). Пусть числа  $x_{ij}$  удовлетворяют системе (1.1), (1.2). Складывая равенства (1.1) по  $i$  от 1 до  $m$  и равенства (1.2) по  $j$  от 1 до  $n$ , получаем

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

что доказывает необходимость условий теоремы.

Допустим теперь, что объемы производства и потребления задачи (1.1)—(1.4) удовлетворяют условию баланса (1.6).

Пусть

$$\bar{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$d = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Как нетрудно проверить,

$$\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{m, n} \text{ — план задачи (1.1)—(1.4).}$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^n b_j = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^m a_i = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$\bar{x}_{ij} > 0$ , так как  $a_i > 0$ ,  $b_j > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Итак, задача (1.1) — (1.4) имеет планы. В соответствии с теоремой 3.4 гл. 3 [52] для установления разрешимости рассматриваемой задачи осталось показать, что линейная форма (1.4) ограничена снизу на множестве планов задачи. Условия (1.1) и (1.3) обеспечивают выполнение неравенств

$$0 \leq x_{ij} \leq a_i.$$

Следовательно, для любого плана  $X$

$$\begin{aligned} L(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{c_{ij} \geq 0} c_{ij} \cdot 0 + \sum_{c_{ij} < 0} c_{ij} \cdot a_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min(0, c_{ij}) a_i. \end{aligned}$$

Достаточность условий теоремы доказана.

Впрочем, в данном случае можно было бы не использовать теорему 3.4 из [52], поскольку, как мы видели, множество планов транспортной задачи — ограниченное множество, и следовательно, любая непрерывная функция достигает на нем своей нижней грани.

В главе 1 мы условились обозначать транспортную задачу (1.1) — (1.4), для которой выполнено условие баланса (1.6), буквой  $T$ .

В процессе доказательства теоремы 1.1 было установлено, что система уравнений (1.1), (1.2) совместна не для любых значений ее правых частей. Это указывает на наличие зависимости между уравнениями системы. Действительно, пусть набор величин  $x_{ij}$  удовлетворяет всем уравнениям системы (1.1), (1.2), кроме первого. Покажем, что данный набор удовлетворяет также и первому уравнению

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}. \quad (1.7)$$

Но, по предположению,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j, \quad \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=2}^m a_i,$$

и соотношение (1.7) с учетом условия баланса (1.6) приводит к равенству

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=2}^m a_i = a_1.$$

Аналогично проверяется, что любое уравнение системы (1.1), (1.2) является следствием остальных ее  $n+m-1$  уравнений.

Таким образом, система (1.1), (1.2) содержит не более чем  $n+m-1$  независимых уравнений. Покажем, что на самом деле число независимых уравнений системы (1.1), (1.2) равно  $n+m-1$ , т. е. ранг системы  $n+m-1$ . Для этого достаточно обнаружить в матрице условий транспортной задачи квадратную подматрицу порядка  $n+m-1$  с определителем, не равным нулю. Как нетрудно видеть, такой подматрицей является, например, матрица, составленная из первых  $n+m-1$  компонент векторов  $P_{1n}, P_{2n}, \dots, P_{mn}, P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1, n-1}$ . Действительно, ее определитель

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline m \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline n-1 \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \end{array} = 1.$$

$\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow m \rightarrow \leftarrow n-1 \rightarrow \\ \hline \end{array}$

Итак, показано, что транспортная задача содержит  $n+m-1$  независимых уравнений, причем для получения эквивалентной линейно независимой системы условий следует отбросить одно из уравнений системы (1.1), (1.2) (все равно какое). Однако, несмотря на это, система (1.1), (1.2) обычно выписывается полностью: в таком виде она выглядит более симметричной.

**1.4.** Анализ транспортной задачи, как и любой задачи линейного программирования, существенно опирается на результаты теории двойственности. В этом пункте приводится формулировка двойственной транспортной задачи и отмечаются основные ее свойства, вытекающие из теорем гл. 3 [52].

Введем вектор

$$W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n),$$

составленный из  $n+m$  компонент (по числу условий-равенств задачи  $T$ ). Первые  $m$  компонент  $u_j$  вектора  $W$  соответствуют уравнениям системы (1.1), следующие  $n$  составляющих  $-v_i$  отвечают уравнениям системы (1.2). (Знак минус перед  $u_i$  ставится ради удобства изложения.)

Согласно общему правилу составления двойственных задач (см. § 5 гл. 3 [52]) задача, сопряженная по отношению к транспортной задаче  $T$ , состоит в следующем.

Требуется максимизировать линейную форму

$$L(W) = (P, W) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad (1.8)$$

при условиях

$$(P_{ij}, W) = v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

Ради краткости будем иногда обозначать задачу (1.8), (1.9) символом  $\bar{T}$ . Поясним экономический смысл задачи  $\bar{T}$ . Каждому пункту производства  $A_i$  ставится в соответствие число  $u_i$ , а каждому пункту потребления  $B_j$  сопоставляется число  $v_j$ . Величины  $u_i$  и  $v_j$  можно интерпретировать как оценки единицы транспортируемого продукта в соответствующих пунктах. Неравенство

$$v_j - u_i \leq c_{ij}$$

означает, что приращение оценки единицы продукта при его перевозке по коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$  не должно превышать транспортные расходы  $c_{ij}$ . Это и понятно, так как рост оценки обусловлен только дополнительными затратами на перевозку.

Согласно лемме 5.1 гл. 3 [52] для любых планов  $W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$  и  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$  задач  $\bar{T}$  и  $T$  соответственно имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i. \quad (1.10)$$

Другими словами, суммарные транспортные расходы при любом плане перевозок  $X$  не меньше, чем приращение суммарной оценки всего перевезенного продукта, если только оценки  $u_i$  и  $v_j$  подчиняются условиям (1.9). Естественно, что оценки продукта в различных пунктах должны быть выбраны такими, чтобы приращение суммарной оценки продукта при полном удовлетворении потребителей совпало с затратами на транспортировку, хотя бы для одного плана перевозок. Это условие в силу (1.10) приводит к необходимости максимизировать линейную форму (1.8) при ограничениях (1.9). Итак, задача  $\bar{T}$  состоит в выборе оценок транспортируемого продукта для каждого из пунктов  $A_i$  и  $B_j$ . Соотношения (1.8) и (1.9) показывают, что искомая система оценок может быть определена лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Действительно, если

$$W' = (-u'_1, -u'_2, \dots, -u'_m, v'_1, v'_2, \dots, v'_n),$$

$$W'' = (-u''_1, -u''_2, \dots, -u''_m, v''_1, v''_2, \dots, v''_n),$$

причем  $v'_j - v''_j = u'_i - u''_i = h$  для всех  $i$  и  $j$ , то

$$v'_j - u'_i = v''_j - u''_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Далее

$$\tilde{L}(W') = \sum_{j=1}^n b_j v'_j - \sum_{i=1}^m a_i u'_i = \tilde{L}(W'') + h \left( \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \right).$$

Следовательно, учитывая условие баланса (1.6), получаем

$$\tilde{L}(W') = \tilde{L}(W''),$$

т. е. если  $W'$  — решение задачи  $\bar{T}$ , то  $W''$  также является решением задачи. Для ликвидации неоднозначности в назначении оценок можно, например, поступить следую-

щим образом. Пусть  $r$  — стоимость производства единицы продукта в любом пункте  $A_i$ . Потребуем, чтобы суммарная оценка продукции всех пунктов совпадала со стоимостью производства этой продукции, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i = r \cdot \sum_{i=1}^m a_i. \quad (1.11)$$

Оценка  $u_i$  не обязана равняться стоимости  $r$  производства единицы продукта. Неравенство  $u_i - r > 0$  означает, что пункт  $A_i$  имеет благоприятное расположение по сравнению со средним, причем величина  $u_i - r$  определяет количественно степень географического преимущества пункта  $A_i$ . Аналогично расшифровывается противоположное неравенство:  $u_i - r < 0$ .

1.5. Как мы видели, транспортная задача  $T$  всегда разрешима. Поэтому первая теорема двойственности (см. п. 6.2 гл. 3 [52]) для этой задачи формулируется так.

*Теорема 1.2. Задача  $T$  всегда имеет решение, причем, если  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  и  $W = (v_1, v_2, \dots, v_n, -u_1, -u_2, \dots, -u_m)$  — оптимальные планы задач  $T$  и  $T'$  соответственно, то*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i. \quad (1.12)$$

Равенство (1.12) показывает, что суммарные транспортные расходы при оптимальном плане перевозок равны приращению суммарной оценки продукции при полном удовлетворении всех потребителей.

Будем говорить, что коммуникация  $\overrightarrow{A_i B_j}$  допустима, если для любого решения  $W = (v_1, v_2, \dots, v_n, -u_1, -u_2, \dots, -u_m)$  задачи  $T'$

$$c_{ij} = v_j - u_i.$$

Другими словами, допустимыми являются такие коммуникации, вдоль которых приращение ценности перевозимого продукта совпадает с величиной транспортных расходов.

Очевидно, предположение о допустимости коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$  эквивалентно требованию, чтобы условие  $v_j - u_i \leq c_{ij}$  системы (1.9) было закрепленным (см. п. 6.4 гл. 3 [52]).

Сформулируем вторую теорему двойственности применительно к транспортной задаче.

**Теорема 1.3.** *Если в соответствии с некоторым оптимальным планом по коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$  планируется положительная перевозка, то  $\overrightarrow{A_i B_j}$  является допустимой коммуникацией. Обратно, если  $\overrightarrow{A_i B_j}$  — допустимая коммуникация, то существует оптимальный план перевозок, согласно которому по  $\overrightarrow{A_i B_j}$  назначается положительная перевозка*

Таким образом, при составлении оптимального плана используются только допустимые коммуникации. При этом заведомо существует оптимальный план перевозок, в соответствии с которым загружаются все допустимые коммуникации. Последнее утверждение является очевидным следствием теоремы 1. 3. Действительно, перенумеруем допустимые коммуникации, и пусть  $X_i$  — оптимальный план задачи  $T$ , согласно которому вдоль  $i$ -й допустимой коммуникации осуществляется положительная перевозка ( $i=1, 2, \dots, l$ , где  $l$  — число допустимых коммуникаций). В качестве искомого оптимального плана можно принять

$$X = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l X_i.$$

Теоремы 1.2 и 1.3 не нуждаются в специальных обоснованиях, так как являются частными случаями общих теорем двойственности, изложенных в § 6 гл. 3 [52].

## § 2. Критерий оптимальности плана транспортной задачи

**2.1.** Численный анализ транспортной задачи, как и любой задачи линейного программирования, существенно опирается на критерий оптимальности — необходимое и достаточное условие оптимальности плана задачи.

Критерий оптимальности плана задачи  $T$  может быть выведен из теоремы 1. 2. Однако в этом нет необходимости, поскольку он является частным случаем теоремы 7.4 гл. 3 [52]. Приведем соответствующую формулировку.

**Теорема 2.1.** *Для оптимальности плана  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  задачи  $T$  необходимо и достаточно существование чисел  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_m$  таких, что*

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ для } i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0. \quad (2.2)$$

Числа  $v_j$  и  $u_i$  — разрешающие множители задачи  $T$  — обычно называют потенциалами пунктов задачи (смысл этого названия поясняется в п. 1.2 гл. 4). Напомним, что, как показано в § 7 гл. 3 [52], вектор  $W = (v_1, v_2, \dots, v_n, -u_1, -u_2, \dots, -u_m)$ , который составлен из чисел  $v_j$  и  $u_i$ , связанных условиями (2.1), (2.2) с оптимальным планом  $X$ , является решением задачи  $T$ . С другой стороны, любое решение задачи  $T$  связано условиями (2.1), (2.2) со всяким оптимальным планом задачи  $T$ . Отсюда вытекает, что вектор потенциалов  $W$  соответствует всему множеству решений задачи  $T$ , а не какому-либо одному ее оптимальному плану.

**2.2.** В ряде моделей приходится считаться с тем, что транспортные возможности коммуникаций, связывающих пункты производства и потребления, не безграничны, т. е. для каждой коммуникации существует некоторое предельное значение перевозки, превышение которого невозможно. Это предельное значение величины перевозки принято называть *пропускной способностью* соответствующей коммуникации.

Напомним формулировку транспортной задачи, учитывающую ограниченные возможности коммуникаций. Целью задачи, как и прежде, является полное удовлетворение потребностей всех пунктов  $B_j$  за счет продукта, имеющегося в пунктах  $A_i$ , при минимальных транспортных затратах. Однако теперь планируемые перевозки следует выбирать так, чтобы они не превышали пропускных способностей коммуникаций, т. е. удовлетворяли

условиям

$$x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

где  $d_{ij}$  — пропускная способность коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$ .

Итак, транспортная задача с ограниченными пропускными способностями коммуникаций состоит в минимизации линейной формы (1.4) при условиях (1.1) — (1.3) и (2.3). Ради краткости обозначим эту задачу через  $T_d$ .

Следует отметить, что в противоположность задаче  $T$  сформулированная задача не всегда разрешима, поскольку величины пропускных способностей коммуникаций могут оказаться недостаточными для транспортировки всего имеющегося продукта. В самом деле, если задача  $T_d$  имеет план, то должны соблюдаться условия

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Неравенства (2.4) означают, что суммарная пропускная способность коммуникаций, исходящих из пункта  $A_i$ , не меньше, чем объем производства этого пункта ( $i=1, 2, \dots, m$ ); неравенства (2.5) указывают, что суммарная пропускная способность коммуникаций, заканчивающихся в пункте  $B_j$ , не меньше, чем потребности данного пункта ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Однако условия (2.4) — (2.5) не являются достаточными для совместности системы ограничений задачи  $T_d$ . Для выяснения факта совместности системы условий задачи  $T_d$  в общем случае следует попытаться найти план задачи (соответствующие алгоритмы излагаются в § 8 гл. 4). Если план удастся построить, то система (1.1) — (1.3), (2.3) совместна; в противном случае задача  $T_d$  не имеет ни одного плана. Совместность системы условий задачи  $T_d$  гарантирует ее разрешимость, так как линейная форма (1.4) заведомо ограничена на множестве планов задачи.

В дальнейшем нам понадобится критерий оптимальности плана задачи  $T_d$ .

**Теорема 2.2.** Для оптимальности плана  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$  задачи  $T_d$  необходимо и достаточно существование чисел  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_m$  таких, что

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad \text{если } x_{ij} = 0, \quad (2.6)$$

$$v_j - u_i \geq c_{ij}, \quad \text{если } x_{ij} = d_{ij}, \quad (2.7)$$

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \text{если } 0 < x_{ij} < d_{ij}. \quad (2.8)$$

Доказательство справедливости критерия следует из теоремы 7.2 гл. 3 [52]. Действительно, согласно теореме 7.2, оптимальность плана  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$  задачи  $T_d$  эквивалентна существованию разрешающих множителей  $v_j, -u_i, W_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) таких, что

$$v_j - u_i - W_{ij} \leq c_{ij}, \quad \text{если } x_{ij} = 0, \quad (2.9)$$

$$v_j - u_i - W_{ij} = c_{ij}, \quad \text{если } x_{ij} > 0, \quad (2.10)$$

$$W_{ij} \geq 0, \quad \text{если } x_{ij} = d_{ij}, \quad (2.11)$$

$$W_{ij} = 0, \quad \text{если } x_{ij} < d_{ij}. \quad (2.12)$$

Покажем, что условия (2.9) — (2.12) эквивалентны условиям (2.6) — (2.8) теоремы 2.2.

Пусть числа  $v_j$  и  $u_i$  связаны условиями (2.6) — (2.8) с некоторым планом  $X$ . Если положить

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } x_{ij} = 0, \\ v_j - u_i - c_{ij} & \text{при } x_{ij} > 0, \end{cases}$$

то, как нетрудно видеть, система чисел  $v_j, u_i, W_{ij}$  подчиняется условиям (2.9) — (2.12).

Допустим теперь выполненными соотношения (2.9) — (2.12). Условия (2.9) и (2.12) приводят к (2.6); условия (2.10) и (2.11) эквивалентны (2.7). Равенства (2.8) вытекают из (2.10) и (2.12).

Итак, условия (2.6) — (2.8) эквивалентны соотношениям (2.9) — (2.12), а следовательно, и условиям оптимальности плана  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$ .

Числа  $v_j$  и  $u_i$  можно, как и прежде, считать оценками продукта в соответствующих пунктах производства и потребления. В этой интерпретации условия (2.6) — (2.8) имеют естественное истолкование. Если приращение оценки продукта  $v_j - u_i$  при его перемещении по

коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$  меньше транспортных расходов  $c_{ij}$ , то данная перевозка убыточна и, следовательно, ее значение в оптимальном плане должно быть равно нулю. Если указанное приращение оценки превышает транспортные расходы, то значение соответствующей перевозки в оптимальном плане должно быть возможно большим, т. е. равным величине пропускной способности рассматриваемой коммуникации. Отмеченные требования и отражены в условиях (2.6) — (2.8).

В заключение следует подчеркнуть, что задача  $T$  является частным случаем задачи  $T_d$ , например, при  $d_{ij} = 2a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , так как при таких значениях пропускных способностей условия (2.3) автоматически соблюдаются.

### § 3. Опорные планы транспортной задачи

3.1. При численном анализе транспортной задачи, как и любой другой задачи линейного программирования, опорные планы — вершины многогранника условий задачи — играют особую роль. В транспортной задаче понятие опорного плана имеет наглядный геометрический смысл, к выяснению которого мы и переходим.

Обратившись к графическому способу задания транспортной задачи (п. 1.2), введем два определения. Последовательность различных коммуникаций вида

$$\overrightarrow{A_{i_1} B_{j_1}}, \overrightarrow{A_{i_2} B_{j_1}}, \overrightarrow{A_{i_2} B_{j_2}}, \dots, \overrightarrow{A_{i_{s-1}} B_{j_{s-1}}}, \overrightarrow{A_{i_s} B_{j_{s-1}}}, \overrightarrow{A_{i_s} B_{j_s}} \quad (3.1)$$

назовем *маршрутом*, связывающим пункты  $A_{i_1}$  и  $B_{j_s}$ . Последовательность (3.1) характерна тем, что любые две ее соседние коммуникации либо исходят из одного пункта, либо заканчиваются в одном пункте.

Используя маршрут, составленный из коммуникаций (3.1), можно осуществить перевозку из пункта  $A_{i_1}$  в пункт  $B_{j_s}$ , проходя при этом через пункты  $B_{j_1}$ ,  $A_{i_2}$ ,  $B_{j_2}$ , ...,  $A_{i_{s-1}}$ ,  $B_{j_{s-1}}$ ,  $A_{i_s}$ . В маршруте (3.1) завязано  $s$  пунктов производства и  $s$  пунктов потребления; число коммуникаций маршрута  $2s - 1$ . Однако следует заметить, что в процессе движения часть коммуникаций бу-

дет проходиться в противоположном направлении (от пункта потребления к пункту производства). Это относится, например, к коммуникации  $\overrightarrow{A_i B_j}$ , как, впрочем, и к любой коммуникации маршрута, занимающей в (3.1) четное место.

Маршрут (3.1), к которому добавлена коммуникация  $\overrightarrow{A_1 B_3}$ , назовем *замкнутым*. Движение по замкнутому маршруту в каком-то фиксированном направлении, начиная от любого пункта, включенного в маршрут, приводит к тому же пункту, если пройти ровно  $2s$  коммуникаций. Маршрут и замкнутый маршрут иногда называют *цепочкой* и *замкнутой цепочкой (циклом)* соответственно. Обратимся для иллюстрации к рис. 3.1.

Коммуникации  $\overrightarrow{A_1 B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_3}$  составляют маршрут, связывающий пункты  $A_1$  и  $B_3$ . Коммуникации  $\overrightarrow{A_1 B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_3}$ ,  $\overrightarrow{A_1 B_3}$  составляют замкнутый маршрут.

3.2. Как уже отмечалось, коммуникация  $\overrightarrow{A_i B_j}$  соответствует вектору условий  $P_{ij}$  транспортной задачи. Приводимое ниже утверждение дает возможность охарактеризовать линейно независимые системы, составленные из векторов условий транспортной задачи, в геометрических терминах.

Теорема 3.1. Система, составленная из векторов условий транспортной задачи, является линейно независимой в том и только в том случае, если из коммуникаций, отвечающих векторам системы, невозможно составить замкнутый маршрут.

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему  $R$ , составленную из векторов  $P_{ij}$ . Обозначим совокупность пар индексов  $(i, j)$ , отвечающих векторам системы  $R$ , через  $E$ . Таким образом,

$$R = \{P_{ij}\}_{(i, j) \in E}.$$

Достаточность. Допустим, что из коммуникаций, отвечающих векторам системы  $R$ , невозможно составить замкнутый маршрут. Докажем, что  $R$  — линейно независимая система векторов.

Если предположить противное, т. е. линейную зависимость векторов системы  $R$ , то существуют такие числа  $a_{ij}$ ,  $(i, j) \in E$ , среди которых не все нули, что

$$\sum_{(i, j) \in E} a_{ij} P_{ij} = 0. \quad (3.2)$$

Пусть, например,  $a_{i_1 j_1} \neq 0$  (при этом, естественно,  $(i_1, j_1) \in E$ ). Из равенства (3.2) получаем

$$-a_{i_1 j_1} P_{i_1 j_1} = \sum_{(i, j) \in E_1} a_{ij} P_{ij}, \quad (3.3)$$

где  $E_1$  образуется из  $E$  вычеркиванием пары индексов  $(i_1, j_1)$ . Компонента с номером  $i_1$  левой части векторного равенства (3.3) отлична от нуля. Следовательно, то же относится и к правой части этого равенства, т. е. среди векторов  $P_{ij}$ ,  $(i, j) \in E_1$ , найдется хотя бы один вектор вида  $P_{i_1 j_2}$  с коэффициентом  $a_{i_1 j_2} \neq 0$ . Перенесем выделенный вектор в левую часть равенства (3.3):

$$-a_{i_1 j_1} P_{i_1 j_1} - a_{i_1 j_2} P_{i_1 j_2} = \sum_{(i, j) \in E_2} a_{ij} P_{ij}, \quad (3.4)$$

где  $E_2 = E_1 - (i_1, j_2)$ . Поскольку  $j_2 \neq j_1$ , компонента с номером  $i_1$  левой части равенства (3.4), равная  $-a_{i_1 j_2}$ , отлична от нуля. Поэтому среди векторов правой части равенства (3.4) обязательно найдется хотя бы один вектор вида  $P_{i_2 j_2}$ , для которого коэффициент  $a_{i_2 j_2} \neq 0$ . Перенесем его также в левую часть равенства, получаем

$$-a_{i_1 j_1} P_{i_1 j_1} - a_{i_1 j_2} P_{i_1 j_2} - a_{i_2 j_2} P_{i_2 j_2} = \sum_{(i, j) \in E_3} a_{ij} P_{ij},$$

где

$$E_3 = E_2 - (i_2, j_2).$$

Процесс переноса векторов в левую часть равенства может быть продолжен и дальше. Допустим, что уже проведено  $2k-1$  шагов (для определенности число шагов выбрано нечетным). Тогда имеет место соотношение

$$-\sum_{\mu=1}^k a_{i_\mu j_\mu} P_{i_\mu j_\mu} - \sum_{\mu=1}^{k-1} a_{i_\mu j_{\mu+1}} P_{i_\mu j_{\mu+1}} = \sum_{(i, j) \in E_{2k-1}} a_{ij} P_{ij}, \quad (3.5)$$

где

$$E_{2k-1} = E_{2k-2} - (i_k, j_k).$$

Могут представиться два случая:

1.  $i_k = i_\lambda$  при некотором  $\lambda$ , заключенном между 1 и  $k-1$ .
2.  $i_k \neq i_\lambda$  для  $\lambda = 1, 2, \dots, k-1$ .

В первом случае процесс переноса заканчивается, причем из коммуникаций, отвечающих векторам левой части равенства (3.5), можно образовать замкнутый маршрут. Действительно, таким маршрутом является

$$\overrightarrow{A_{i_\lambda} B_{j_{\lambda+1}}}, \overrightarrow{A_{i_{\lambda+1}} B_{j_{\lambda+1}}}, \dots, \overrightarrow{A_{i_{k-1}} B_{j_k}}, \overrightarrow{A_{i_k} B_{j_k}}.$$

Во втором случае процесс переноса векторов продолжается. Поскольку  $i_k \neq i_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, k-1$ , то среди векторов  $P_{ij}$ ,  $(i, j) \in E_{2k-1}$  обязательно найдется вектор вида  $P_{i_k j_{k+1}}$  с ненулевым коэффициентом (если бы это было не так, у всех векторов, участвующих в равенстве (3.5), кроме  $P_{i_k j_k}$ ,  $i_k$ -я компонента равнялась бы нулю, что противоречит (3.5)). Описанный процесс не может длиться бесконечно, так как все векторы, переносимые в левую часть, различны. Поэтому через конечное число шагов мы обязательно столкнемся со случаем 1, который, как было показано, ведет к построению замкнутого маршрута. Итак, допустив, что векторы системы  $R$  линейно зависимы, мы входим в противоречие с условием теоремы, согласно которому составить замкнутый маршрут из коммуникаций, отвечающих векторам системы  $R$ , невозможно. Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость. Пусть векторы системы линейно независимы. Если бы существовал замкнутый маршрут из коммуникаций

$$\overrightarrow{A_{i_1} B_{j_1}}, \overrightarrow{A_{i_2} B_{j_1}}, \dots, \overrightarrow{A_{i_s} B_{j_s}}, \overrightarrow{A_{i_1} B_{j_s}},$$

отвечающих векторам системы  $R$ , то, очевидно,

$$P_{i_1 j_1} - P_{i_2 j_1} + P_{i_2 j_2} - \dots + P_{i_s j_s} - P_{i_1 j_s} = 0,$$

что указывает на линейную зависимость векторов системы  $R$ . Полученное противоречие доказывает необходимость условий теоремы 3.1.

Согласно общему определению план  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  задачи  $T$  называется опорным, если система векторов  $P_{ij}$ , отвечающих положительным перевозкам  $x_{ij}$ , линейно независима. Коммуникацию  $\overrightarrow{A_i B_j}$  задачи  $T$  назовем *основной* коммуникацией плана  $X$ , если, согласно этому плану, по ней запланирована положительная перевозка, т. е.  $x_{ij} > 0$ .

Теорема 3.1 позволяет дать еще одно эквивалентное определение опорного плана, имеющее прозрачный геометрический смысл.

*План задачи  $T$  называется опорным, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.*

Например, план, изображенный на рис. 3.1, является опорным, так как из его основных коммуникаций  $\overrightarrow{A_1 B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_1 B_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2 B_3}$  замкнутый маршрут составить невозможно.

Приведенное определение опорного плана удобно еще и тем, что дословно переносится на задачи с ограниченными пропускными способностями. Для этого следует лишь заново определить понятие основной коммуникации. Коммуникацию  $\overrightarrow{A_i B_j}$  задачи  $T_d$  назовем основной коммуникацией плана  $X$ , если

$$0 < x_{ij} < d_{ij}.$$

В соответствии с определением опорного плана для задач с двусторонними ограничениями (см. п. 3.2 гл. 7 [52]) план  $X$  является опорным, если векторы  $P_{ij}$ , для которых  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ , линейно независимы. Поэтому, учитывая определение основной коммуникации задачи  $T_d$  и результат теоремы 3.1, приходим к тому же геометрическому определению опорного плана, что и для задачи  $T$ .

**3.3.** В дальнейшем нам придется осуществлять разложение векторов условий задачи  $T$  по некоторым системам, составленным из векторов  $P_{ij}$ . Остановимся поэтому на геометрическом смысле таких разложений.

Пусть  $R$  — некоторая линейно независимая система векторов  $P_{ij}$ , а  $E$  — набор пар индексов  $(i, j)$ , соответствующих векторам этой системы,



Рассмотрим произвольную матрицу  $\Phi$  размеров  $m \times n$ . Между позициями матрицы  $\Phi$  и векторами условий (коммуникациями) задачи можно установить естественное взаимно однозначное соответствие: вектор  $P_{ij}$  (коммуникация  $\overrightarrow{A_i B_j}$ ) соответствует позиции  $\Phi$ , расположенной на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Очевидно,  $i$ -я строка матрицы  $\Phi$  соответствует  $i$ -му пункту производства,  $j$ -й столбец —  $j$ -му пункту потребления.

Таблица 3.1

$\Phi =$

	1	2	3	4	5	6
1	0					+
2	0	0				
3		0				
4			0			
5				0	0	0

Произвольная система  $R$  векторов  $P_{ij}$  может быть задана путем выделения соответствующих позиций матрицы  $\Phi$  (или, что то же самое, путем выделения соответствующих элементов этой матрицы).

В табл. 3.1 изображена матрица  $\Phi$  для задачи с пятью пунктами производства и шестью пунктами потребления. Позиции матрицы  $\Phi$ , отвечающие векторам системы  $R$ , отмечены нулями. Таким образом, система  $R$  в данном случае состоит из векторов  $P_{11}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ ,  $P_{32}$ ,  $P_{33}$ ,  $P_{43}$ ,  $P_{53}$ ,  $P_{54}$ ,  $P_{55}$ ,  $P_{56}$ .

Рассмотрим произвольный маршрут, связывающий пункты  $A_k$  и  $B_l$ :

$$\overrightarrow{A_k B_{j_1}}, \overrightarrow{A_{i_1} B_{j_1}}, \dots, \overrightarrow{A_{i_s} B_{j_s}}, \overrightarrow{A_{i_s} B_l}, \quad (3.8)$$

который проходит через пункты  $B_{j_1}$ ,  $A_{i_1}$ ,  $B_{j_2}$ ,  $A_{i_2}$ , ...,  $B_{j_s}$ ,  $A_{i_s}$ . Маршруту (3.8) отвечает цепочка позиций матрицы  $\Phi$  вида

$$(k, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2), \dots, (i_s, j_s), (i_s, l). \quad (3.9)$$

Позиции цепочки (3.9) расположены в строках с номерами  $k, i_1, i_2, \dots, i_s$  и столбцах с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_s, l$ . При этом в  $k$ -й строке и  $l$ -м столбце содержится по одной позиции цепочки, а в остальных строках и столбцах — по две.

Если присоединить к цепочке (3.8) позицию  $(k, l)$ , то получим замкнутую цепочку (цикл). В каждом столб-

це и в каждой строке матрицы  $\Phi$  либо вовсе нет позиций цикла, либо содержится ровно две такие позиции. Естественно говорить, что цепочка (3.8) замыкается на позиции  $(k, l)$ . Результаты теорем 1.1 и 1.2 могут быть теперь переформулированы в виде следующих двух правил.

*Для линейной независимости системы векторов  $P_{ij}$  необходимо и достаточно, чтобы из позиций матрицы  $\Phi$ , отвечающих этим векторам, невозможно было составить цикл.*

Разложить вектор  $P_{kl}$  по векторам  $P_{ij}$  системы  $R$  это значит составить цепочку из позиций, отвечающих векторам  $R$ , замыкающуюся на позиции  $(k, l)$ . Если такой цепочки не существует, то  $P_{kl}$  не является линейной комбинацией векторов системы  $R$ . Естественно, что в качестве  $\Phi$  можно взять любую матрицу размеров  $m \times n$ .

Обратимся к табл. 3.1. Векторы системы  $R$  линейно независимы, так как из позиций, отмеченных нулями, нельзя составить замкнутую цепочку. Для того чтобы разложить вектор  $P_{16}$  по векторам системы  $R$ , составим цепочку из отмеченных элементов матрицы  $\Phi$ , замыкающихся на позиции (1.6). Как видно из табл. 3.1, эта цепочка состоит из позиций: (5, 6), (5, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 2), (2, 1), (1, 1). Следовательно,

$$P_{16} = P_{56} - P_{53} + P_{33} - P_{32} + P_{22} - P_{21} + P_{11}.$$

**3.4.** Ранг системы условий задачи  $T$  равен  $m+n-1$ . Поэтому базис\*) опорного плана транспортной задачи должен содержать  $m+n-1$  линейно независимых векторов.

Итак, базис опорного плана  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  — это система  $m+n-1$  линейно независимых векторов  $P_{ij}$ , содержащая все те векторы, которым соответствуют положительные перевозки. Определение базиса для задачи  $T_d$  отличается только тем, что вместо положительных перевозок рассматриваются перевозки, большие нуля и меньшие  $d_{ij}$ . Правила, приведенные в предыдущем пункте, позволяют легко выяснять опорность плана и

---

\*) См. в [52] (гл. 4, § 1) определение базиса опорного плана задачи линейного программирования в канонической форме записи.

осуществлять разложение векторов, не входящих в базис, по векторам этого базиса. В данном случае роль матрицы  $\Phi$  естественно поручить матрице  $X$ , составленной из элементов исследуемого плана.

Для выяснения опорности плана  $X$  транспортной задачи  $T$  ( $T_d$ ) следует попытаться составить замкнутую цепочку из положительных элементов (элементов вида  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ ) матрицы  $X$ . Если цикл удастся построить,  $X$  — неопорный план. В противном случае  $X$  — опорный план.

Рассмотрим, например, три плана задач типа  $T$ , изображаемые матрицами  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (табл. 3.2).

Таблица 3.2

$$X_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & \\ & 3 & \\ 2 & 1 & 2 \\ & 7 & 3 \\ & & 2 \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ & 4 \\ & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 4 \end{vmatrix}$$

Позиции матриц  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , отвечающие нулевым элементам, не заполняются. В матрице  $X_1$  легко находятся замкнутые цепочки из положительных элементов. Одна из них намечена стрелками. Следовательно,  $X_1$  не является опорным планом. Это можно обнаружить и другим способом: число положительных перевозок плана  $X_1$  равно  $13 > m+n-1=8$ .

Число положительных перевозок плана  $X_2$  равно  $m+n-1=8$ . Однако он также не является опорным, так как из положительных элементов матрицы  $X_2$  можно составить цикл. Этот цикл намечен стрелками. Наконец, план  $X_3$  — опорный, поскольку, как легко видеть, невозможно составить цикл из положительных элементов матрицы  $X_3$ .

Допустим, что  $X$  — опорный план задачи  $T$  (или  $T_d$ ) и вектор  $P_{kl}$  не принадлежит его базису. Перевозки, отвечающие векторам базиса, будем, как обычно, называть базисными.

Для того чтобы определить разложение вектора  $P_{kl}$  по векторам базиса плана  $X$ , следует построить цепочку из базисных элементов матрицы  $X$ , замыкающуюся на  $x_{kl}$ . Если эта цепочка имеет вид

$$x_{klj_1}, x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, \dots, x_{i_sj_s}, x_{i_sl},$$

то

$$P_{kl} = P_{kj_1} - P_{i_1j_1} + P_{i_1j_2} - \dots - P_{i_sj_s} + P_{i_sl}.$$

Число положительных элементов матрицы  $X_3$  равно  $m+n-1=8$ . Поэтому базис опорного плана  $X_3$  состоит из восьми векторов, отвечающих этим элементам. Разложим вектор  $P_{51}$  по векторам базиса плана  $X_3$ . Для этого составим цепочку из положительных элементов  $X_3$ , которая замыкается на позиции (5, 1) (эта позиция отмечена знаком «+»). Искомая цепочка имеет вид

$$x_{53}, x_{23}, x_{22}, x_{12}, x_{11}.$$

Следовательно,

$$P_{51} = P_{53} - P_{23} + P_{22} - P_{12} + P_{11}.$$

Пусть  $X$  — некоторый опорный план задачи  $T$  (или  $T_d$ ) и  $x_{kl}$  — любой небазисный элемент  $X$ . Рассмотрим множество  $S$  элементов матрицы  $X$ , состоящее из всех базисных элементов и элемента  $x_{kl}$ . Покажем, что  $S$  содержит единственный цикл.

Пусть  $S'$  — множество базисных элементов плана  $X$ . Поскольку вектор  $P_{kl}$  является линейной комбинацией векторов базиса (базис состоит из  $m+n-1$  линейно независимых векторов!), то можно построить цепочку из элементов  $S'$ , замыкающуюся на  $x_{kl}$ . Итак, множество  $S$  содержит циклы.

Далее, любой цикл, составленный из элементов  $S$ , обязан содержать  $x_{kl}$ . Действительно, в противном случае множество  $S'$  содержало бы циклы, что противоречит линейной независимости векторов базиса. Рассмотрим любые два цикла  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  множества  $S$ . Поскольку оба они содержат элемент  $x_{kl}$ , то каждый из них определяет цепочку из элементов  $S'$ , замыкающуюся на  $x_{kl}$ . Если бы  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , то вектор  $P_{kl}$  мог бы быть представлен в виде двух различных линейных комбинаций векторов базиса плана  $X$ , что невозможно в силу линейной независимости

этих векторов. Следовательно,  $\gamma_1 = \gamma_2$  и множество  $S$  содержит единственный цикл.

Доказанное предложение позволяет сделать вывод о том, что разложение векторов  $P_{ij}$  по векторам базиса опорного плана  $X$ , так же как и выяснение опорности плана, сводится к построению замкнутых цепочек (циклов), составленных из некоторых элементов матрицы  $X$ .

3.5. Если исследуемые матрицы имеют небольшие размеры, то выявление цикла можно осуществлять без всяких правил — «на глаз». Так было в примерах, рассмотренных нами выше. Однако в более сложных ситуациях, а также при использовании ЦВМ необходимо иметь точное формальное правило, позволяющее выяснить, существует цикл или нет, и в случае, если цикл существует, построить его.

Одно из таких правил (*правило вычеркивания*) мы и собираемся изложить. Пусть  $X$  — произвольный план, записанный в виде матрицы размером  $m \times n$ . Выделим в матрице  $X$  некоторое множество  $S$  ее элементов. Требуется выяснить, существуют ли циклы, составленные из элементов  $S$ . Будем просматривать одну за другой строки матрицы  $X$  и вычеркивать те из них, которые либо вовсе не содержат элементов  $S$ , либо содержат только один такой элемент. Просмотрев все строки матрицы  $X$ , перейдем к ее столбцам и вычеркнем те из них, которые содержат менее двух элементов  $S$ . При этом следует помнить, что элементы  $S$ , находящиеся в вычеркнутых строках, в расчет не принимаются. Далее повторяем весь процесс, просматривая вначале строки, а затем столбцы матрицы  $X$  (вернее, ее подматрицы, полученной в результате вычеркивания строк и столбцов на предыдущем шаге). После нескольких шагов процесс вычеркивания заканчивается одним из двух исходов:

1. Все линии (строки и столбцы) матрицы  $X$  оказались вычеркнутыми.

2. Получена подматрица  $X$  матрицы  $X$ , в каждой линии которой имеется по крайней мере два элемента из множества  $S$ .

В первом случае делаем вывод, что из элементов множества  $S$  невозможно составить цикл. Для доказательства этого утверждения предположим противное,

т. е. существование цикла  $\gamma$ , составленного из элементов  $S$ . Выберем элемент  $\gamma$ , вычеркнутый раньше других элементов рассматриваемого цикла. Но если некоторый элемент входит в цикл, то в каждой из обеих его линий обязательно имеются другие элементы цикла. Очевидно, один из этих элементов должен быть вычеркнут раньше выбранного элемента, вопреки предположению. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Таким образом, первый случай возможен лишь тогда, когда множество  $S$  не содержит циклов.

Если процесс вычеркивания завершается случаем 2, то множество  $S$  имеет циклы.

Пусть  $x_{i_1 j_1}$  — элемент подматрицы  $\bar{X}$ , принадлежащий  $S$ . В  $i_1$ -й строке подматрицы  $\bar{X}$  по условию имеется еще один элемент  $S$ . Пусть это  $x_{i_1 j_2}$ . Аналогично в  $j_2$ -м столбце  $\bar{X}$  содержится элемент  $x_{i_2 j_2} \in S$ . Таким образом, образуется цепочка

$$x_{i_1 j_1}, x_{i_1 j_2}, x_{i_2 j_2}, \dots,$$

состоящая из элементов  $S$ . Поскольку  $S$  содержит конечное число элементов, то в конце концов в цепочку будет включен такой элемент  $x_{i_s j_s}$  (для определенности нечетный), что  $i_s \leq i_\lambda$  при  $1 \leq \lambda < s$ . Следовательно, последовательность

$$x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}, x_{i_{\lambda+1} j_{\lambda+1}}, \dots, x_{i_{s-1} j_s}, x_{i_s j_s} = x_{i_\lambda j_s} \quad (3.10)$$

является циклом, т. е.  $S$  заведомо содержит замкнутые цепочки.

В случае, когда  $S$  содержит единственный цикл, каждый элемент  $\bar{X}$ , принадлежащий  $S$ , входит в этот цикл. Действительно, пусть  $x_{i_1 j_1} \in S$  содержится в  $\bar{X}$  и в то же время не входит в единственный цикл  $\gamma$  множества  $S$ . Построим две цепочки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  из элементов  $S$ , каждая из которых исходит из  $x_{i_1 j_1}$ , причем первая по строке, а вторая по столбцу. Делается это по тем же правилам, которые использовались при образовании цикла (3.10). Цепочки продолжаются до тех пор, пока в них первый раз будет включен элемент цикла  $\gamma$ .

В процессе образования цепочек  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  цикл образоваться не может (это противоречит предположению

о том, что  $S$  имеет единственный цикл). Следовательно, их построение завершится первым пересечением цикла  $\gamma$ .

Пусть  $x'$  и  $x''$  — концы цепочек  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , соответственно принадлежащие  $\gamma$ . Рассмотрим последовательность элементов, состоящую из  $\gamma_1$ , части  $\gamma$  между  $x'$  и  $x''$  и  $\gamma_2$ .

Таблица 3.3

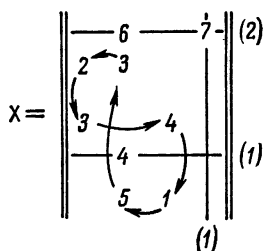
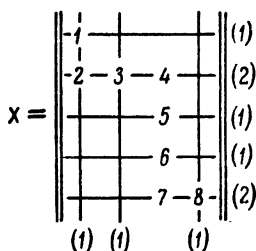
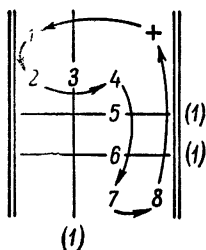


Таблица 3.4



Очевидно, эта последовательность образует цикл, не совпадающий с  $\gamma$ . Полученное противоречие доказывает, что любой элемент множества  $S$ , содержащийся в  $\tilde{X}$ , принадлежит единственному циклу  $\gamma$ .

Таблица 3.5



Итак, при наличии единственного цикла процесс вычеркивания не только выявляет сам факт существования цикла, но и позволяет его построить — цикл состоит из элементов  $S$ , содержащихся в  $\tilde{X}$ .

Как уже отмечалось, множество  $S$ , состоящее из базисных элементов опорного плана и любого небазисного элемента, содержит единственный цикл. Поэтому метод вычеркивания дает формальное правило для осуществления разложения по векторам базиса.

Приведем примеры, иллюстрирующие использование правила вычеркивания. Номер шага, на котором вычеркивается некоторая линия, отмечается соответствующей цифрой, стоящей у этой линии. Рассмотрим план, изображаемый матрицей  $X$  (табл. 3.3).

Примем в качестве  $S$  — множество положительных элементов матрицы  $X$ . Просмотр строк матрицы  $X$  за-

вершается вычеркиванием 4-й строки, далее вычеркивается 4-й столбец, затем 1-я строка. На этом процесс вычеркивания заканчивается, имеет место 2-й случай. Делаем вывод о том, что план  $X$  не является опорным. В данном случае невычеркнутые элементы множества  $S$  образуют единственный цикл, отмеченный стрелками.

Обратимся к другому плану (табл. 3.4).

Процесс вычеркивания приводит к случаю 1: вначале вычеркиваются строки 1, 3, 4, затем столбцы 1, 2, 4 и, наконец, строки 2 и 5. Следовательно,  $X$  — опорный план.

Найдем с помощью правила вычеркивания разложение вектора  $P_{14}$  по векторам базиса плана  $X$  (табл. 3.5).

Образуем множество  $S$  из положительных элементов матрицы  $X$  и элемента  $x_{14}=0$ .

Процесс вычеркивания приводит к вычеркиванию строк 3 и 4 и столбца 2. Оставшиеся элементы  $S$  образуют цепочку, замыкающуюся на  $x_{14}$ . Используя данные табл. 3.5, имеем

$$P_{14} = P_{11} - P_{21} + P_{23} - P_{53} + P_{54}.$$

#### § 4. Метод «северо-западного угла» вычисления опорного плана задачи $T$

4.1. Приведем простой способ вычисления опорного плана задачи  $T$ . Алгоритм построения плана складывается из нескольких шагов, на каждом из которых заполняется либо строка (случай 1), либо столбец (случай 2) матрицы, отвечающей искомому плану  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$ .

Определим левый верхний элемент матрицы  $X$ , положив

$$x_{11} = \min(a_1, b_1).$$

Возможны два случая:

1.  $a_1 < b_1$ , т. е.  $x_{11} = a_1$ . Заполняем 1-ю строку, начиная со 2-го элемента, нулями.

2.  $a_1 \geq b_1$ , т. е.  $x_{11} = b_1$ . Заполняем 1-й столбец, начиная со 2-го элемента нулями.

На этом заканчивается первый шаг метода. Допустим, что уже проделано  $t$  шагов; опишем следующий  $(t+1)$ -й шаг. Вычисляем левый верхний элемент матрицы  $X$  из числа еще не определенных. Пусть этим

элементом будет  $x_{\lambda\mu}$  ( $\lambda + \mu = t + 2$ ). Полагаем

$$x_{\lambda\mu} = \min(a_{\lambda}^{(t)}, b_{\mu}^{(t)}),$$

где

$$a_{\lambda}^{(t)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}; \quad b_{\mu}^{(t)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}.$$

Если  $a_{\lambda}^{(t)} < b_{\mu}^{(t)}$  (случай 1), то заполняем  $\lambda$ -ю строку матрицы, начиная с  $(\mu+1)$ -го элемента, нулями. Если  $a_{\lambda}^{(t)} \geq b_{\mu}^{(t)}$ , то заполняем нулями  $\mu$ -й столбец, начиная с  $(\lambda+1)$ -й строки. При этом

$$a_i^{(t+1)} = \begin{cases} a_{\lambda}^{(t)} - x_{\lambda\mu}, & i = \lambda, \\ a_i^{(t)}, & i > \lambda, \end{cases}$$

$$b_j^{(t+1)} = \begin{cases} b_{\mu}^{(t)} - x_{\lambda\mu}, & j = \mu, \\ b_j^{(t)}, & j > \mu. \end{cases}$$

Если после  $(t+1)$ -го шага заполнены не все позиции матрицы  $X$ , то переходим к следующему  $(t+2)$ -му шагу. Поскольку каждый шаг метода приводит к заполнению строки или столбца матрицы  $X$ , то общее число шагов равно  $n + m - 1$ .

Характерным для рассмотренного алгоритма является способ заполнения матрицы, составляющий искомый план задачи  $T$ ; каждый шаг начинается с левого верхнего (северо-западного) элемента незаполненной части матрицы. Поэтому описанный алгоритм принято называть методом *северо-западного угла*.

Покажем, что матрица, заполненная по методу северо-западного угла, является планом задачи  $T$ . Воспользуемся методом индукции по числу  $p = m + n$ . Если  $p = 2$ , то наше утверждение очевидно, так как по условию баланса  $a_1 = b_1$ . Предположим, что оно верно для любой задачи  $T$  с общим числом  $p$  пунктов производства и потребления, меньшим или равным  $k - 1$ .

Пусть теперь  $p = m + n = k$ . Сделаем один шаг метода северо-западного угла. При этом заполнится либо строка, либо столбец матрицы  $X$ . Пусть для определенности имел место случай 1, т. е.

$$x_{11} = a_1, \quad x_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Тогда, очевидно, оставшиеся элементы матрицы  $S$  должны быть выбраны таким образом, чтобы составлять план задачи  $T$  с  $m - 1$  пунктами производства и  $n$  пунктами потребления, объемы которых  $a_2, a_3, \dots, a_m$  и  $b_1 - a_1, b_2, \dots, b_n$  соответственно. Последующие шаги метода связаны именно с этой задачей. Поскольку, по предположению индукции, метод северо-западного угла приводит к плану задачи  $T$ , если общее число ее пунктов не превышает  $k - 1$ , и

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = x_{11} = a_1,$$

то получаем требуемый результат для  $p = k$ . Итак, метод северо-западного угла приводит к плану задачи  $T$  при любом значении  $p$ .

Покажем теперь, что план, полученный методом северо-западного угла, всегда является опорным.

Объединим в множество  $S$  «северо-западные» элементы всех шагов (их общее число  $m + n - 1$ ). Очевидно, любой положительный элемент матрицы  $X$  входит в  $S$ . Условимся вычеркивать строку или столбец матрицы  $X$ , как только они оказываются полностью заполненными. Вспомним, что если некоторая линия (строка или столбец) вычеркивается (заполняется), то множеству  $S$  принадлежит только ее первый элемент из числа элементов, не вычеркнутых на предыдущих шагах. Следовательно, вычеркивание производится по правилам, описанным в предыдущем пункте, и поскольку все элементы матрицы  $X$  в конце концов оказываются вычеркнутыми, построенный план будет опорный. Базисными составляющими плана  $X$  являются перевозки, входящие в множество  $S$ .

**4.2.** Приведем пример определения опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла.

Рассмотрим задачу  $T$  с четырьмя пунктами производства и четырьмя пунктами потребления, объемы которых 1, 2, 3, 4 и 5, 1, 2, 2 соответственно. Объемы производства и потребления записываются справа и снизу от заполняемой таблицы (табл. 3.6). Для наглядности после каждого шага полезно справа от таблицы выписы-



## § 5. Целочисленность опорных планов транспортной задачи

**5.1.** Специфика векторов  $P_{ij}$ , составляющих матрицу  $A$  условий транспортной задачи, определяет одно интересное и важное свойство ее решений, значительно расширяющее область приложения транспортных моделей. Это свойство — целочисленность всех опорных планов задачи  $T$  и, в частности, всех ее опорных решений.

Сформулируем и докажем утверждение, из которого вытекает свойство целочисленных опорных планов транспортных задач.

**Теорема 5.1.** *Каждая перевозка  $x_{ij}$  любого опорного плана  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  задачи  $T$  является линейной комбинацией чисел  $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n$  (объемов производства и потребления) с коэффициентами 0,  $-1$ , 1.*

Доказательство теоремы 5.1 опирается на следующую лемму, устанавливающую особенность матрицы  $A$  условий задачи  $T$ .

**Лемма 5.1.** *Любой минор матрицы  $A$  равен либо 0, либо  $\pm 1$ .*

Доказательство леммы проводится методом индукции по порядку минора. Для миноров  $A$  первого порядка утверждение леммы тривиально, поскольку элементы матрицы  $A$  — нули и единицы. Предположим, что лемма верна для всех миноров  $A$  порядка  $k-1$ , и докажем ее справедливость для любого минора порядка  $k$ . Разделим строки матрицы  $A$  на две группы; первые  $m$  строк отнесем к 1-й группе, последующие  $n$  строк — ко 2-й. Из вида матрицы  $A$  следует, что каждый ее столбец содержит одну единицу среди строк 1-й группы. Пусть  $\Delta_k$  — произвольный минор матрицы  $A$  порядка  $k$ . Каждый столбец  $\Delta_k$  может содержать либо две единицы, либо одну единицу, либо сплошь состоять из нулей. Если имеет место последняя из перечисленных возможностей, утверждение леммы очевидно, так как  $\Delta_k = 0$ . Пусть теперь каждый столбец  $\Delta_k$  содержит по меньшей мере одну единицу. Тогда могут представиться два случая:

а) хотя бы в одном столбце  $\Delta_k$  содержится ровно одна единица;

б) во всех столбцах  $\Delta_k$  — по две единицы.

Разберем оба случая. а) Выбираем столбец минора  $\Delta_k$ , содержащий одну единицу, и раскладываем по нему исследуемый минор. В результате получаем

$$\Delta_k = \pm \Delta'_{k-1}, \quad (5.1)$$

где  $\Delta'_{k-1}$  — некоторый минор матрицы  $A$  порядка  $k-1$ . Из (5.1) и предположения индукции вытекает, что  $\Delta_k$  равен либо 0, либо  $\pm 1$ .

б) В этом случае среди строк  $\Delta_k$  имеются представители как первой, так и второй групп строк матрицы  $A$ . Выбираем любую строку  $\Delta_k$ , принадлежащую к первой группе, и прибавляем к ней остальные строки этой группы, содержащиеся в миноре  $\Delta_k$ . В результате образуется строка, состоящая из одних единиц (каждый столбец  $\Delta_k$  на пересечении со строками 1-й группы содержит ровно одну единицу). Аналогично, прибавляя к любой строке второй группы остальные строки этой группы, получаем на ее месте еще одну единичную строку. Заметим, что проведенные преобразования не меняют величины  $\Delta_k$ . Итак,  $\Delta_k$  совпадает с определителем, обладающим двумя одинаковыми строками, и, следовательно, равен нулю. Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы 5.1. Допустим, что исследуемый опорный план  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  состоит из  $l$  положительных перевозок. Поскольку векторы  $P_{ij}$ , соответствующие этим перевозкам, линейно независимы (данный план — опорный!), из матрицы, составленной ими, можно выделить квадратную подматрицу  $A_l$  порядка  $l$  с определителем, отличным от нуля. Таким образом,  $l$  положительных перевозок рассматриваемого плана удовлетворяют системе  $l$  линейных уравнений с матрицей  $A_l$  и правыми частями, являющимися подсистемой величин:  $a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_n$ . Положительные перевозки опорного плана  $X$  определяются из полученной системы по правилу Крамера. Перенумеруем положительные элементы  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  согласно их месту в рассматриваемой системе. Тогда  $j$ -й элемент равняется дроби, числителем которой является определитель матрицы, полученной из  $A_l$  заменой ее  $j$ -го столбца столбцом свободных членов, а знаменателем — определитель  $|A_l|$  матрицы  $A_l$ . В соответствии с леммой 5.1  $|A_l| = \pm 1$ .

Раскладывая далее определитель, стоящий в числителе, по элементам  $j$ -го столбца и учитывая, что миноры матрицы  $A_l$  порядка  $l-1$  являются также минорами  $A$  и следовательно, равны либо 0, либо  $\pm 1$ , получаем утверждение теоремы для произвольной положительной перевозки. Что касается любой нулевой перевозки плана  $X$ , то для нее доказываемое утверждение очевидно. Теорема доказана.

**5.2.** Во многих транспортных моделях объемы производства и потребления всех пунктов являются целыми числами (см., например, задачу выбора). Из теоремы 5.1 следует, что опорные планы таких задач составлены из целочисленных перевозок.

Как известно, любая разрешимая задача линейного программирования, записанная в канонической форме, имеет хотя бы одно опорное решение (см. теорему 3.1 гл. 3 [52]). Итак, справедливо следующее важное предложение.

*Теорема 5.2. Если объемы производства и потребления задачи  $T$  — целые числа, то любой ее опорный план составлен из целочисленных перевозок и среди решений задачи имеется хотя бы одно целочисленное.*

Заметим, что в предположениях теоремы 5.2 можно гарантировать целочисленность не всех, а лишь некоторых решений транспортной задачи. Если задача  $T$  с целочисленными объемами производства и потребления имеет несколько решений, то среди них заведомо существуют нецелые. Действительно, пусть  $X_1, X_2$  — оптимальные планы задачи  $T$ . Если среди перевозок  $X_1$  или  $X_2$  имеются нецелые, наше утверждение доказано.

Допустим, что  $X_1 = \|x_{ij}^{(1)}\|$ ,  $X_2 = \|x_{ij}^{(2)}\|$  — целочисленные планы. Поскольку планы  $X_1, X_2$  не тождественны, найдутся такие индексы  $i, j$ , что  $x_{ij}^{(1)} \neq x_{ij}^{(2)}$ . Для определенности положим  $x_{ij}^{(1)} > x_{ij}^{(2)}$ . Введем в рассмотрение новый план задачи  $T$ :

$$X_3 = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2 = \|\lambda x_{ij}^{(1)} + (1 - \lambda) x_{ij}^{(2)}\|.$$

В соответствии со свойствами решений задач линейного программирования  $X_3$  — оптимальный план задачи  $T$  при любой величине  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Рассмотрим

перевозку, намеченную планом  $X_3$  между  $A_i$  и  $B_j$ :

$$x_{ij}^{(3)} = \lambda x_{ij}^{(1)} + (1 - \lambda) x_{ij}^{(2)}.$$

Если  $\lambda$  изменяется от 0 до 1, величина  $x_{ij}^{(3)}$  заполняет отрезок между  $x_{ij}^{(2)}$  и  $x_{ij}^{(1)}$ . В частности, при некотором  $\lambda_0$

$$x_{ij}^{(3)}(\lambda_0) = \lambda_0 x_{ij}^{(1)} + (1 - \lambda_0) x_{ij}^{(2)} = x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при  $\lambda = \lambda_0$  оптимальный план задачи не является целочисленным.

Теорема 5.2 без труда переносится на транспортные задачи с ограниченными пропускными способностями. Для этого следует только дополнительно предположить целочисленность всех  $d_{ij}$ .

## § 6. Вырожденность в транспортных задачах

6.1. В § 3 гл. 3 [52] выделён класс невырожденных задач линейного программирования. Как неоднократно отмечалось, необходимость такого выделения обусловлена особенностями конечных методов линейного программирования, использование которых в случае вырожденных задач (прямых или двойственных) несколько усложняется. Напомним определение невырожденности применительно к задаче  $T$ . Опорный план задачи  $T$  с  $m$  пунктами производства и  $n$  пунктами потребления назовем *невырожденным*, если он содержит  $m + n - 1$  положительных перевозок. Опорный план, не удовлетворяющий этому условию, называется *вырожденным*. Напомним, что базис опорного плана транспортной задачи состоит из  $n + m - 1$  векторов (ранг матрицы условий задачи  $T$  равен  $n + m - 1$ ).

Таким образом, приведенное определение эквивалентно требованию положительности всех базисных перевозок опорного плана. Если часть базисных перевозок плана — нули, то он является вырожденным.

В случае транспортной задачи понятие невырожденности опорного плана имеет наглядный геометрический смысл.

Опорный план  $X$  задачи  $T$  будем называть *нераспадающимся*, если любая ее пара пунктов может быть соединена маршрутом из основных коммуникаций плана  $X$ . Опорные планы, не удовлетворяющие отмеченным требованиям, назовем *распадающимися*.

**Теорема 6.1.** *Понятия невырожденного и нераспадающегося опорного плана эквивалентны.*

**Доказательство.** 1. Допустим, что  $X$  — невырожденный опорный план. Любой вектор условий  $P_{ij}$  задачи  $T$  является линейной комбинацией векторов базиса плана  $X$ . Следовательно, пункты  $A_i$  и  $B_j$  могут быть соединены маршрутом, который составлен из коммуникаций, отвечающих векторам базиса (см. теорему 3.2). Все базисные перевозки плана  $X$  — положительные числа. Поэтому маршрут, связывающий  $A_i$  и  $B_j$ , состоит из основных коммуникаций. Итак, любой пункт производства может быть связан с произвольным пунктом потребления маршрутом из основных коммуникаций. То же самое верно для любой пары пунктов производства (потребления). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть некоторый вспомогательный пункт потребления (производства). Искомый маршрут складывается из двух маршрутов, составленных из основных перевозок: первый связывает один из данных пунктов со вспомогательным пунктом, второй идет от вспомогательного пункта к другому пункту рассматриваемой пары. Таким образом, показано, что  $X$  — нераспадающийся план.

2. Пусть теперь  $X$  — нераспадающийся опорный план. Свяжем маршрутом из основных коммуникаций произвольную пару пунктов  $A_i$  и  $B_j$ . В соответствии с теоремой 3.2 можно сделать вывод, что вектор  $P_{ij}$  — линейная комбинация векторов условий задачи  $T$ , которым отвечают положительные перевозки плана  $X$ . Следовательно, число этих векторов  $m+n-1$  (оно совпадает с рангом матрицы  $A$ , составленной из векторов  $P_{ij}$ ). Итак, опорный план  $X$  имеет  $m+n-1$  положительных перевозок, т. е. является невырожденным. Теорема 6.1 доказана полностью.

Определения невырожденного и нераспадающегося планов легко распространяются на задачи типа  $T_d$ . Для

этого следует лишь, как обычно, вместо положительных перевозок рассматривать такие перевозки  $x_{ij}$ , которые удовлетворяют условию  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ . Теорема 6.1 справедлива и для задач типа  $T_d$ .

**6.2.** Если все опорные планы задачи  $T$  невырожденные (нераспадающиеся), то задачу называют невырожденной. Наличие хотя бы одного вырожденного плана указывает на вырожденность задачи. Приводимое ниже утверждение позволяет легко проверять, является ли данная транспортная задача невырожденной или нет.

**Теорема 6.2.** *Для невырожденности задачи (1.1)–(1.4) необходимо и достаточно отсутствие такой неполной группы пунктов производства, суммарный объем производства которой совпадает с суммарными потребностями некоторой группы пунктов потребления.* Другими словами, необходимое и достаточное условие невырожденности транспортной задачи состоит в том, что для любых двух систем индексов  $i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_s$ , где  $t + s < n + m$ , имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^t a_{i_k} \neq \sum_{k=1}^s b_{j_k}. \quad (6.1)$$

**Доказательство.** 1. Допустим, что задача  $T$  невырожденная, однако для некоторых систем индексов  $i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_s, t + s < n + m$ , справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^t a_{i_k} = \sum_{k=1}^s b_{j_k}. \quad (6.2)$$

Разобьем пункты производства и потребления на две группы. К первой группе пунктов производства (группе производства) отнесем  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$ , ко второй — остальные пункты производства. Аналогично в первую группу пунктов потребления (группу потребления) объединим  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}$ , во вторую — остальные пункты потребления. Равенство (6.2) означает, что объем производства первой группы производства совпадает с потребностями первой группы потребления.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

аналогичное утверждение справедливо также относительно второй группы производства и второй группы потребления. Пользуясь методом северо-западного угла, можно определить такие перевозки между пунктами первых групп в количестве не более чем  $t+s-1$ , что весь продукт, находящийся в пунктах производства 1-й группы, вывозится, причем запросы пунктов, входящих в первую группу потребления, удовлетворяются за счет этого продукта полностью. Точно так же с помощью не более чем  $(m-t) + (n-s) - 1$  перевозок можно вывезти весь продукт из пунктов 2-й группы производства, удовлетворив при этом все запросы пунктов 2-й группы потребления. Нетрудно видеть, что совокупность всех введенных перевозок образует опорный план задачи  $T$ . Но поскольку общее число этих перевозок не превосходит

$$(t+s-1) + [(m-t) + (n-s) - 1] = n+m-2,$$

получим противоречие с предположением о невырожденности рассматриваемой задачи, которое и доказывает необходимость условий теоремы.

2. Пусть неравенство (6.1) имеет место для любых систем индексов  $i_1, \dots, i_t, j_1, \dots, j_s$ ,  $s+t < n+m$  и  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  — произвольный опорный план исследуемой задачи  $T$ . Рассмотрим множество пунктов производства и потребления, содержащее  $A_1$ , а также те пункты, которые могут быть соединены с  $A_1$  с помощью основных коммуникаций плана  $X$ . Покажем, что это множество совпадает со всей совокупностью пунктов задачи  $T$ . Действительно, если бы оно состояло из  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}; B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}$ , где  $t+s < n+m$ , то согласно плану  $X$ , каждый из пунктов  $A_{i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, t$  ( $A_{i_1} = A_1$ ), вывозил бы свой продукт лишь в пункты  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_s}$ , причем за счет этих перевозок потребности последних были бы полностью удовлетворены. Таким образом, мы

имели бы равенство

$$\sum_{k=1}^t a_{i_k} = \sum_{k=1}^s b_{j_k},$$

противоречащее условию (6.1).

Итак, пункт  $A_1$  (а следовательно, и любой другой) можно соединить с помощью основных коммуникаций со всеми пунктами рассматриваемой транспортной задачи. Следовательно,  $X$  — нераспадающийся план или, что то же самое, по теореме 6.1, невырожденный. Учитывая произвольность  $X$ , делаем вывод о невырожденности рассматриваемой задачи. Необходимость и достаточность условий теоремы 6.2 доказаны.

В главах 4—6 рассматриваются различные конечные методы решения транспортной задачи, используемые в настоящее время в подавляющем большинстве теоретических и практических исследований. Конечные методы решения транспортной задачи тесно связаны с конечными методами решения общей задачи линейного программирования. Каждый конечный алгоритм транспортной задачи строится на базе соответствующего метода решения общей задачи линейного программирования и отличается лишь достаточно полным учетом специфики условий рассматриваемой задачи. При описании алгоритмов обращается внимание как на вычислительные схемы, так и на теоретическую сторону вопроса. В частности, выясняется связь излагаемых методов с соответствующими общими методами линейного программирования.

Настоящая глава посвящена методу потенциалов — детализации второго алгоритма метода последовательного улучшения плана применительно к транспортной задаче. §§ 1—3 посвящены теоретическим аспектам метода, а §§ 4—7 его вычислительным схемам. В §§ 8—9 метод потенциалов приспособляется к решению транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

## § 1. Теоретические основы метода

**1.1. Метод потенциалов** — первый точный метод решения транспортной задачи — был предложен в 1949 г. Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным [19]. По существу этот метод является детализацией метода последовательного улучшения плана применительно к транспортной задаче. Однако впервые он был изложен вне

связи с общими методами линейного программирования. Несколько позднее аналогичный алгоритм был разработан Данцигом [14], который исходил из общих идей линейного программирования. В американской литературе метод потенциалов принято называть *модифицированным распределительным методом*.

Метод потенциалов позволяет, отправляясь от некоторого опорного плана перевозок, построить решение транспортной задачи за конечное число итераций (шагов). Общая схема отдельной итерации метода состоит в следующем. По данному опорному плану каждому пункту задачи сопоставляется число, называемое его предварительным потенциалом (в терминах метода улучшения плана это — оценка соответствующего условия задачи относительно данного базиса). Предварительные потенциалы выбираются так, чтобы их разность для любой пары пунктов  $A_i, B_j$ , связанных основной коммуникацией, была равна  $c_{ij}$  — стоимости перевозки между этими пунктами единицы продукта.

Если разность предварительных потенциалов для каждой пары пунктов  $A_i, B_j$  не превосходит  $c_{ij}$ , то данный план перевозок — решение задачи, а сами предварительные потенциалы — потенциалы задачи (или оценки ее условий).

В противном случае указывается способ получения нового опорного плана, связанного с меньшими транспортными издержками. Через конечное число итераций процесс решения завершается построением оптимального плана и системы потенциалов задачи.

Как видим, общая схема метода потенциалов схожа со вторым алгоритмом метода последовательного улучшения плана. Использование 2-го алгоритма для решения транспортной задачи связано с тем, что при больших значениях  $m$  и  $n$  число  $m+n$  условий задачи оказывается существенно меньше числа  $mn$  ее переменных. В конце этого параграфа мы подробно остановимся на взаимоотношениях метода потенциалов и метода улучшения плана.

1.2. Перед тем как начать детальное рассмотрение метода потенциалов, естественно вернуться к понятию потенциала, которое было введено в п. 2.1 гл. 3.

Пусть  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  — произвольный план задачи  $T$ . Элемент матрицы транспортных издержек  $c_{ij}$  будем называть  $X$ -существенным, если  $x_{ij} > 0$ , т. е. если  $\overrightarrow{A_i B_j}$  — основная коммуникация плана  $X$ .

Функция  $W$ , определенная на совокупности пунктов производства и потребления задачи  $T$ , была названа вектором потенциалов или просто потенциалом данной задачи, если

$$W(B_j) - W(A_i) \leq c_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

$$W(B_j) - W(A_i) = c_{ij} \quad (1.2)$$

для всех  $X$ -существенных элементов некоторого плана  $X$ . Будем называть план  $X$  *потенциальным*, если существует потенциал задачи  $T$ , связанный с этим планом условием (1.2). Между оптимальностью и потенциальностью планов задачи  $T$  существует тесная связь. В п. 2.1 гл. 3 был установлен критерий оптимальности плана задачи  $T$  (теорема 2.1), который имеет следующую эквивалентную формулировку: *для оптимальности плана  $X$  необходима и достаточна его потенциальность*.

Заметим, что потенциал вовсе не следует считать зависящим от конкретного оптимального плана задачи  $T$ . Как отмечалось в п. 2.1 гл. 3, каждый потенциал задачи  $T$  связан условием (1.2) с любым ее оптимальным планом (естественно, что это утверждение имеет нетривиальный смысл лишь для транспортных задач с неединственным решением). Поэтому функция  $W$  может быть определена еще и так:  $W$  — потенциал задачи  $T$ , если

$$W(B_j) - W(A_i) \leq c_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

причем для тех  $c_{ij}$ , которые являются  $X$ -существенными элементами некоторого оптимального плана  $X$  этой задачи (или, что то же самое, которым отвечают допустимые коммуникации задачи), соответствующие неравенства переходят в равенства. Итак, функция  $W$  определяется множеством оптимальных планов данной задачи.

Напомним, что значения потенциала  $W$  в пунктах задачи  $T$  были названы потенциалами этих пунктов. Выбор этого термина можно оправдать следующей аналогией.

Представим себе, что некую единичную массу необходимо перенести из точки  $A_i$  в точку  $B_j$ . Величина работы, которую необходимо совершить при переносе массы из  $A_k$  в  $B_l$  ( $k=1, 2, \dots, m, l=1, 2, \dots, n$ ), задана и равна  $c_{kl}$  (работа, совершаемая при движении от  $B_l$  к  $A_k$ , предполагается равной  $-c_{kl}$ ). Условимся, что непосредственное движение от  $A_k$  к  $B_l$  (или наоборот) возможно лишь в том случае, если  $\overrightarrow{A_k B_l}$  — допустимая коммуникация задачи  $T$ . Пусть движение от  $A_i$  к  $B_j$  запланировано следующим образом:

$$A_i \rightarrow B_{j_1} \rightarrow A_{i_1} \rightarrow B_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow A_{i_s} \rightarrow B_j.$$

Тогда производимая при этом работа  $A$  вычисляется по формуле

$$A = c_{ij_1} - c_{i_1 j_1} + c_{i_1 j_2} - \dots - c_{i_s j_s} + c_{i_s j}.$$

Используя теперь свойства потенциала задачи  $T$ , имеем

$$\begin{aligned} A = [W(B_{j_1}) - W(A_i)] - [W(B_{j_1}) - W(A_{i_1}) + \dots \\ \dots - [W(B_{j_s}) - W(A_{i_s})] + [W(B_j) - \\ - W(A_{i_s})] = W(B_j) - W(A_i). \end{aligned}$$

Итак, разность  $W(B_j) - W(A_i)$  совпадает с количеством работы, необходимым для переноса единичной массы из  $A_i$  в  $B_j$ . При этом выполняется основное свойство движения в потенциальном поле: величина работы, производимой при перемещении некоторой массы, не зависит от формы возможного пути, связывающего рассматриваемые точки, а определяется лишь самими точками. Заметим, что в силу (1.1) непосредственное движение от  $A_k$  к  $B_l$  всегда связано с наименьшей работой по сравнению с движением между этими точками по любому из допустимых маршрутов.

**1.3. Метод потенциалов** состоит из конечного числа однотипных итераций. Каждая итерация разбивается на два этапа. На первом этапе план, полученный в результате предыдущих итераций, проверяется на оптимальность. Если план оказывается решением задачи, процесс заканчивается. Если же это не так, осуществляется переход ко второму этапу. На втором этапе строится

новый план перевозок, который в невырожденном случае связан с меньшими транспортными издержками.

Опишем отдельную итерацию метода, ограничившись вначале невырожденным случаем. Итак, допустим, что уже проведено  $k$  итераций метода потенциалов и в результате получен опорный план  $X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|_{m,n}$ . Разберем подробно очередную,  $(k+1)$ -ю итерацию.

Этап 1. На этом этапе производится исследование плана  $X_k$  на оптимальность. Обозначим через  $R_k$  совокупность  $X_k$ -существенных элементов матрицы  $C$ , т. е. таких  $c_{ij}$ , которым соответствуют  $x_{ij}^{(k)} > 0$ , и определим величины  $u_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $v_j^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  (предварительные потенциалы), удовлетворяющие системе уравнений

$$v_j^{(k)} - u_i^{(k)} = c_{ij} \quad \text{для всех } c_{ij} \in R_k. \quad (1.3)$$

В силу предположения о невырожденности исследуемой задачи любые два пункта  $A_i$ ,  $B_j$  можно соединить маршрутом, состоящим из основных коммуникаций плана  $X_k$  (план  $X_k$  нераспадающийся). Далее, из опорности плана  $X_k$  вытекает, что отмеченный маршрут строится однозначно (по теореме 3.1 гл. 3 из основных коммуникаций плана  $X_k$  невозможно составить замкнутый маршрут). Поэтому решение системы (1.3) осуществляется предельно просто.

Зададимся значением одной из неизвестных системы (1.3), например положим  $u_1^{(k)} = 0$ . Допустим, что пункт  $A_1$  снабжает в соответствии с планом  $X_k$  пункты  $B_{j_1}$ ,  $B_{j_2}$ , ...,  $B_{j_s}$ . Тогда из соответствующих уравнений системы (1.3) определяем

$$v_{j_\lambda}^{(k)} = c_{1j_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s.$$

Далее аналогичным способом определим значения  $u_i^{(k)}$  для тех  $A_i$ , которые снабжают один из пунктов  $B_{j_\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ . Например, если  $A_{i_1}$  снабжает пункт  $B_{j_1}$ , то

$$u_{i_1}^{(k)} = v_{j_1}^{(k)} - c_{i_1 j_1}.$$

Затем определяются  $v_j^{(k)}$  для  $B_j$ , снабжающихся за счет пунктов  $A_i$  с уже вычисленными значениями  $u_i^{(k)}$ , и т. д. Таким образом, задавшись произвольным значением  $u_1^{(k)}$ , мы легко определим  $u_i^{(k)}$ ,  $v_j^{(k)}$  для всех тех пунктов  $A_i$ ,  $B_j$ , которые можно соединить с  $A_1$  маршрутами из основных коммуникаций плана  $X_k$ . Но, как было отмечено, подобным маршрутом могут быть соединены любые два пункта рассматриваемой задачи и притом единственным образом. Следовательно, при заданном  $u_1^{(k)}$  величины  $u_i^{(k)}$ ,  $v_j^{(k)}$  определяются однозначно для всех пунктов задачи  $T$ . Нетрудно усмотреть, что если бы мы задались произвольным значением любой из величин  $u_i^{(k)}$  или  $v_j^{(k)}$ , то получившиеся в результате числа  $\bar{u}_i^{(k)}$ ,  $\bar{v}_j^{(k)}$  отличались бы от  $u_i^{(k)}$ ,  $v_j^{(k)}$ , вычисленных в предположении  $u_1^{(k)} = 0$ , на некоторую постоянную. Отсюда, в частности, следует, что величина  $v_j^{(k)} - u_i^{(k)}$  определяется однозначно для любых  $i, j$ .

Если предварительные потенциалы  $u_i^{(k)}$ ,  $v_j^{(k)}$  таковы, что для любой пары  $i, j$  имеет место неравенство

$$v_j^{(k)} - u_i^{(k)} \leq c_{ij},$$

то функция  $W$ , определяемая условиями  $W(A_i) = u_i^{(k)}$ ,  $W(B_j) = v_j^{(k)}$  — потенциал задачи  $T$  и, следовательно,  $X_k$ , будучи потенциальным, является вместе с тем и оптимальным планом исследуемой задачи.

Если же для некоторых индексов  $i, j$

$$v_j^{(k)} - u_i^{(k)} > c_{ij},$$

то план  $X_k$  не оптимальный. Необходим переход к этапу 2, на котором этот план будет улучшен.

#### 1.4. Этап 2. Вычислим уклонения

$$c_{ij}^{(k+1)} = c_{ij} - (v_j^{(k)} - u_i^{(k)}).$$

По условию среди чисел  $c_{ij}^{(k+1)}$  имеются отрицательные. Определим пару индексов  $i_0, j_0$  из условия

$$c_{i_0 j_0}^{(k+1)} = \min_{i, j} c_{ij}^{(k+1)}$$

(в качестве  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)}$  можно принять также любое отрицательное уклонение). Соединим пункты  $A_{i_0}$ ,  $B_{j_0}$  маршрутом из основных коммуникаций плана  $X_k$ . Пусть построенный маршрут проходит последовательно через пункты

$$A_{i_0}, B_{j_1}, A_{i_2}, B_{j_2}, \dots, B_{j_{s-1}}, A_{i_s}, B_{j_0}.$$

Рассмотрим перевозки по тем коммуникациям маршрута, которые при движении от  $A_{i_0}$  к  $B_{j_0}$  проводятся в положительном направлении, т. е. от пункта производства к пункту потребления. Минимальную среди них обозначим через  $\theta_k$ . Таким образом,

$$\theta_k = \min_{1 \leq \lambda \leq s} x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)} \quad (i_0 = i_1, j_0 = j_s).$$

Введем в план  $X_k$  следующие изменения: величины перевозок из  $A_{i_\lambda}$  в  $B_{j_\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ , уменьшим на  $\theta_k$ , величины перевозок из  $A_{i_{\lambda+1}}$  в  $B_{j_\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, s-1$ , увеличим на  $\theta_k$  (здесь, как и прежде, полагаем  $i_0 = i_1$ ,  $j_0 = j_s$ ). Кроме того, введем новую перевозку между пунктами  $A_{i_0}$ ,  $B_{j_0}$ , равную  $\theta_k$ . Очевидно, полученная совокупность перевозок является планом исследуемой транспортной задачи. Действительно, все перевозки этой совокупности в силу определения числа  $\theta_k$  неотрицательны. Далее, для любого пункта задачи, через который проходит построенный маршрут, количество вывозимого (для пунктов производства) и ввозимого (для пунктов потребления) продукта не меняется. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим один из пунктов  $A_{i_\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ . В соответствии с новой совокупностью перевозок количество продукта, перевозимого из  $A_{i_\lambda}$  в  $B_{j_\lambda}$ , уменьшается на  $\theta_k$  и одновременно на эту же величину увеличивается грузопоток из  $A_{i_\lambda}$  в  $B_{j_{\lambda-1}}$ .

Подобные же рассуждения показывают, что общее количество продукта, ввозимого в любой из пунктов  $B_{j_\lambda}$ , также не меняется. Что касается остальных пунктов задачи, то условия транспортной задачи для них, естественно, не нарушатся, так как ни одна из перевозок, связанных с этими пунктами, не изменилась.

Покажем, что реализация нового плана  $X_{k+1}$  приводит к меньшим транспортным расходам по сравнению с планом  $X_k$ . Действительно,

$$L_{k+1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(k+1)} = \sum_I c_{ij} x_{ij}^{(k)} + \sum_{\lambda=1}^s c_{i_{\lambda} j_{\lambda}} (x_{i_{\lambda} j_{\lambda}}^{(k)} - \theta_k) + \\ + \sum_{\lambda=1}^{s-1} c_{i_{\lambda+1} j_{\lambda}} (x_{i_{\lambda+1} j_{\lambda}}^{(k)} + \theta_k) + c_{i_0 j_0} \theta_k,$$

где под  $\sum_I$  понимается суммирование по перевозкам тех коммуникаций, которые не вошли в построенный маршрут. Совершая очевидные преобразования, получаем

$$L_{k+1} = L_k + \theta_k [c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_2 j_1} - \dots + c_{i_s j_{s-1}} - c_{i_s j_0}].$$

Вспомним, что все элементы, стоящие в квадратной скобке, кроме  $c_{i_0 j_0}$ , являются  $X_k$ -существенными. Поэтому

$$c_{i_{\lambda} j_{\lambda}} = v_{j_{\lambda}}^{(k)} - u_{i_{\lambda}}^{(k)}, \quad c_{i_{\lambda+1} j_{\lambda}} = v_{j_{\lambda}}^{(k)} - u_{i_{\lambda+1}}^{(k)}.$$

Учитывая далее отрицательность уклонения  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)}$  и положительность  $\theta_k$ , имеем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(k+1)} = L_{k+1} = L_k + \theta_k [c_{i_0 j_0} - (v_{j_1}^{(k)} - u_{i_0}^{(k)}) + \dots \\ \dots + (v_{j_{s-1}}^{(k)} - u_{i_s}^{(k)}) - (v_{j_0}^{(k)} - u_{i_s}^{(k)})] = \\ = L_k + \theta_k [c_{i_0 j_0} - (v_{j_0}^{(k)} - u_{i_0}^{(k)})] = L_k + \theta_k c_{i_0 j_0}^{(k+1)} < L_k.$$

Итак, составлен новый план перевозок  $X_{k+1}$ , соответствующий меньшему значению линейной формы транспортной задачи. Этап 2, а вместе с ним и  $(k+1)$ -я итерация закончены.

Покажем, что вновь составленный план  $X_{k+1}$  обладает свойством опорности. Действительно, если это не так, то из основных коммуникаций  $X_{k+1}$  можно составить замкнутый маршрут  $\gamma$ . Очевидно, маршрут  $\gamma$  должен содержать коммуникацию  $\overrightarrow{A_{i_0} B_{j_1}}$  (в противном случае план  $X_k$  оказался бы неопорным). Коммуникации замкнутого маршрута  $\gamma$ , за исключением  $\overrightarrow{A_{i_0} B_{j_0}}$ , являются основными коммуникациями плана  $X_k$ . Поскольку из таких

коммуникаций можно составить единственный маршрут, соединяющий пункты  $A_{i_0}$ ,  $B_{j_0}$  (план  $\overrightarrow{X_k}$  — опорный!), приходим к выводу, что  $\gamma$  состоит из  $\overrightarrow{A_{i_0} B_{j_0}}$  и маршрута, построенного в процессе улучшения плана  $X_k$ . Но в силу определения числа  $\theta_k$  одна из перевозок

$$x_{i_{\lambda'} j_{\lambda}}^{(k+1)}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s, \quad x_{i_{\lambda+1} j_{\lambda}}^{(k+1)}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, s-1, \quad (1.4)$$

плана  $X_{k+1}$  равна нулю, и, следовательно, соответствующая коммуникация не будет основной для плана  $X_{k+1}$ . Итак,  $\gamma$  содержит по меньшей мере одну неосновную коммуникацию плана  $X_{k+1}$ . Полученное противоречие указывает на опорность плана  $X_{k+1}$ .

Заметим, что в силу предположения о невырожденности только одна перевозка последовательности (1.4) равна нулю. Система основных коммуникаций плана  $X_{k+1}$  образуется из системы основных коммуникаций плана  $X_k$  путем замены одной коммуникации.

Итак, в невырожденном случае метод потенциалов позволяет, отправляясь от некоторого исходного опорного плана, построить последовательность опорных планов задачи  $T$ , которым отвечают монотонно убывающие значения транспортных расходов. Поскольку число таких планов заведомо конечно, то через несколько итераций продолжение последовательности окажется невозможным из-за того, что на первом этапе очередной итерации выявится оптимальность соответствующего плана. Конечность метода потенциалов для невырожденного случая доказана.

## § 2. Вырожденность

**2.1.** До сих пор исследуемая задача  $T$  предполагалась невырожденной. В этом пункте мы освободимся от этого ограничительного допущения, распространив метод потенциалов на вырожденные транспортные задачи.

Вырожденные опорные планы задачи  $T$  содержат меньше чем  $n+m-1$  положительных перевозок. Поэтому среди базисных перевозок вырожденного плана имеются нулевые перевозки. Это обстоятельство может в свою очередь привести к тому, что при переходе по

методу потенциалов к следующему плану величина  $\theta_k$  окажется равной нулю и, следовательно, суммарные транспортные издержки не уменьшатся. Таким образом, монотонное убывание транспортных расходов может быть нарушено и для вывода о конечности метода не будет достаточных оснований.

При построении базиса нового плана нам, как и в случае общей задачи линейного программирования, необходимо знать ответ на два вопроса: какой вектор следует ввести в старый базис, какой вектор (один!) необходимо из него вывести? При ответе на первый вопрос случай вырожденности не приводит ни к каким дополнительным трудностям. Что касается второго вопроса, то критерий, который использовался для ответа на него в невырожденном случае, оказывается недостаточным в вырожденном случае: нулевыми могут стать сразу несколько перевозок, отвечающих нечетным коммуникациям маршрута этапа 2.

Можно было бы, конечно, выводить из старого базиса произвольный вектор коммуникаций из числа удовлетворяющих указанному критерию. Однако при таком подходе не исключен возврат через несколько итераций к старому базису, т. е. появляется возможность заикливания. Необходимо иметь дополнительное правило исключения векторов из старых базисов, которое во всех случаях застраховало бы нас от возможности заикливания. Выводом этого правила мы сейчас и займемся.

Рассмотрим произвольную транспортную задачу  $T$ . Свяжем с ней семейство транспортных задач  $T(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , объемы производства и потребления которых выражаются через соответствующие величины задачи  $T$  по формулам

$$a_i(\varepsilon) = a_i + \varepsilon,$$

$$b_j(\varepsilon) = \begin{cases} b_j, & j \neq n, \\ b_j + m\varepsilon, & j = n. \end{cases}$$

Правило выбора перевозки, подлежащей исключению из числа базисных, основывается на двух утверждениях, формулировки которых приводятся ниже.

I. Существует такое число  $\delta > 0$ , что при любом  $\varepsilon$ , удовлетворяющем условию

$$0 < \varepsilon \leq \delta, \quad (2.1)$$

задача  $T(\varepsilon)$  обладает свойством невырожденности.

II. Существует такое число  $\Delta > 0$ , что при любых  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ , удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} 0 < \varepsilon \leq \Delta, \\ 0 \leq \varepsilon' \leq \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

справедливы следующие утверждения:

а) если  $X(\varepsilon) = \|x_{ij}(\varepsilon)\| = \|x_{ij}\| + \varepsilon\|\alpha_{ij}\|$  — опорный план задачи  $T(\varepsilon)$ , то  $X(\varepsilon') = \|x_{ij}\| + \varepsilon'\|\alpha_{ij}\|$  — опорный план задачи  $T(\varepsilon')$ ;

б) если  $X(\varepsilon)$  — опорное решение задачи  $T(\varepsilon)$ , то  $X(\varepsilon')$  — оптимальный опорный план задачи  $T(\varepsilon')$ .

Здесь под  $\|x_{ij}\|$  понимается матрица, составленная из нулей и коэффициентов разложения вектора

$$P = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

по базису плана  $X(\varepsilon)$ . Матрица  $\|\alpha_{ij}\|$  строится аналогичным образом, исходя из вектора

$$Q = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, 0, \dots, m}_n)^T.$$

Доказывать эти утверждения мы не будем.

Допустим теперь, что нам необходимо найти решение некоторой транспортной задачи  $T$  (быть может вырожденной!). Отмеченные свойства транспортных задач  $T(\varepsilon)$  при достаточно малых  $\varepsilon$  (точнее при  $\varepsilon$ , удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.2)) позволяют применить для этой цели алгоритм метода потенциалов. В самом деле, будем решать вместо задачи  $T$  вспомогательную задачу  $T(\varepsilon)$ , предполагая  $\varepsilon$  достаточно малой величиной. Поясним последнее допущение. При решении задачи методом потенциалов необходимо сравнивать между собой величины перевозок. Пусть  $x_{i_1j_1}(\varepsilon) = x_{i_1j_1} + \varepsilon\alpha_{i_1j_1}$ ,  $x_{i_2j_2}(\varepsilon) = x_{i_2j_2} + \varepsilon\alpha_{i_2j_2}$  — любая пара перевозок задачи  $T(\varepsilon)$ .

Будем считать число  $\varepsilon$  удовлетворяющим условиям (2.1) и (2.2) и настолько малым, что неравенство

$x_{i_1j_1}(\varepsilon) < x_{i_2j_2}(\varepsilon)$  оказывается эквивалентным соблюдению одного из следующих соотношений: либо  $x_{i_1j_1} < x_{i_2j_2}$ , либо  $x_{i_1j_1} = x_{i_2j_2}$ , но  $\alpha_{i_1j_1} < \alpha_{i_2j_2}$ ;  $T(\varepsilon)$  при достаточно малом  $\varepsilon$  — невырожденная задача (утверждение I). Поэтому метод потенциалов через конечное число итераций приведет к ее решению. Полагая в полученном оптимальном плане  $\varepsilon = 0$ , приходим к искомому оптимальному плану задачи  $T$  (утверждение II для  $\varepsilon' = 0$ ).

В соответствии с утверждением II любой план задачи  $T(\varepsilon_0)$  при  $\varepsilon_0$ , удовлетворяющим условию (2.2), порождает семейство планов задач  $T(\varepsilon)$ , где  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Все эти планы могут быть единственным образом представлены в виде

$$\|x_{ij}(\varepsilon)\| = \|x_{ij}\| + \varepsilon \|\alpha_{ij}\|, \quad \text{где } \|x_{ij}\|, \|\alpha_{ij}\|$$

не зависят от  $\varepsilon$ . Это обстоятельство позволяет опускать при вычислении оптимального плана задачи  $T(\varepsilon)$  величину  $\varepsilon$  и оперировать лишь с составляющими плана  $X(\varepsilon)$ :

$$X = \|x_{ij}\| \quad \text{и} \quad \alpha = \|\alpha_{ij}\|.$$

Введем предварительно несколько определений. Пару матриц

$$X = \|x_{ij}\|_{m, n}, \quad \alpha = \|\alpha_{ij}\|_{m, n}$$

назовем *обобщенным планом* задачи  $T$ , если при всех достаточно малых  $\varepsilon$

$$X(\varepsilon) = X + \varepsilon \alpha$$

является планом задачи  $T(\varepsilon)$ . Обобщенный план удобно записывать в виде одной матрицы

$$X/\alpha = \left\| \begin{array}{cccc} x_{11}/\alpha_{11} & x_{12}/\alpha_{12} & \dots & x_{1n}/\alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1}/\alpha_{m1} & x_{m2}/\alpha_{m2} & \dots & x_{mn}/\alpha_{mn} \end{array} \right\|.$$

Элементы матрицы  $X/\alpha$  будем называть *обобщенными перевозками*.

Между двумя любыми обобщенными перевозками введем соотношения «больше, меньше», полагая  $x_{i_1j_1}/\alpha_{i_1j_1} \geq x_{i_2j_2}/\alpha_{i_2j_2}$ , если либо  $x_{i_1j_1} \geq x_{i_2j_2}$ , либо  $x_{i_1j_1} = x_{i_2j_2}$ , но  $\alpha_{i_1j_1} \geq \alpha_{i_2j_2}$ . Очевидно, что условие  $x_{i_1j_1}/\alpha_{i_1j_1} = x_{i_2j_2}/\alpha_{i_2j_2}$

эквивалентно равенствам

$$x_{i_1 j_1} = x_{i_2 j_2}, \quad \alpha_{i_1 j_2} = \alpha_{i_2 j_1}.$$

В частности, обобщенная перевозка  $x_{ij}/\alpha_{ij}$  считается положительной, если либо  $x_{ij} > 0$ , либо  $x_{ij} = 0$ , однако  $\alpha_{ij} > 0$ .

Пусть  $X_1/\alpha_1$ ,  $X_2/\alpha_2$  — два обобщенных плана задачи  $T$ . Будем говорить, что первый план соответствует меньшим транспортным издержкам по сравнению со вторым, если либо

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(1)} < \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(2)},$$

либо

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(2)},$$

но

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_{ij}^{(1)} < \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_{ij}^{(2)}.$$

Обобщенным решением задачи  $T$  считается такой план, который соответствует минимальным транспортным издержкам. Вычисление оптимального обобщенного плана задачи  $T$ , первая составляющая которого является искомым решением этой задачи, можно провести, пользуясь методом потенциалов, если все встречающиеся при этом понятия (такие, как план, положительная перевозка и т. д.) рассматривать в обобщенном смысле.

### § 3. Метод потенциалов и метод последовательного улучшения плана

3.1. Пусть  $X = \|x_{ij}\|$  — некоторый опорный план задачи  $T$ . Обозначим через  $K_X$  совокупность векторов  $P_{ij}$ , отвечающих основным коммуникациям плана  $X$ . Наши рассуждения будут вестись в предположении невырожденности задачи  $T$ . Поэтому  $K_X$  состоит из  $m+n-1$  векторов и является базисом опорного плана  $X$ .

На первом этапе метода потенциалов вычисляются предварительные потенциалы

$$u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n,$$

удовлетворяющие системе уравнений

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ для } (i, j) \in E_X. \quad (3.1)$$

(Здесь  $E_X$  — множество пар индексов векторов, составляющих базис  $K_X$  плана  $X$ .)

Перенумеруем векторы базиса  $K_X$  и обозначим  $l$ -й вектор через

$$A_l = (a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{m+n,l}).$$

Учитывая, что все компоненты вектора  $A_l$ , кроме двух, равных единице, равны нулю, можно переписать систему (3.1) в эквивалентном виде

$$(A_l, M) = \sum_{i=1}^{n+m} a_{il} \mu_i = c_l, \quad l = 1, 2, \dots, n+m-1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} M &= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m+n}) = \\ &= (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n); \end{aligned}$$

$c_l$  — стоимость единичной перевозки по коммуникации, соответствующей вектору  $A_l$ .

Таким образом, предварительные потенциалы составляют вектор оценок условий задачи относительно данного базиса, который определяется во втором алгоритме метода улучшения плана. Если для любого вектора условий  $P_{ij}$

$$(P_{ij}, M) = v_j - u_i \leq c_{ij},$$

то в соответствии с критерием оптимальности метода улучшения плана данный план  $X$  — решение задачи. Это же заключение следует из критерия оптимальности, используемого в методе потенциалов.

Предположим, что при некоторых  $i, j$

$$v_j - u_i > c_{ij}.$$

Тогда в соответствии с методом последовательного улучшения плана выбирается такая пара индексов  $(i_0, j_0)$ , на которой величина

$$c_{ij} - v_j + u_i$$

(оценка вектора условий  $P_{ij}$ ) достигает минимума, и осуществляется переход к новому базису путем замены

одного из векторов системы  $K_X$  вектором  $P_{i_0j_0}$ . Та же операция осуществляется и в методе потенциалов (этап 2). Переход к новому базису связан с разложением вводимого вектора (вектора  $P_{i_0j_0}$ ) по векторам базиса  $K_X$ , что эквивалентно решению системы линейных уравнений. Благодаря простой структуре векторов  $P_{ij}$  решение этой системы существенно облегчается по сравнению с общим случаем. В соответствии с теоремой 3.2 гл. 3 решение системы сводится к составлению маршрута из основных коммуникаций плана  $X$ , который связывает пункты  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$ . Построение этого маршрута осуществляется на втором этапе метода потенциалов.

Согласно методу улучшения плана после разложения вводимого вектора (вектора  $A_h$ ) по векторам старого базиса разыскивается величина

$$\theta = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}. \quad (3.2)$$

Здесь  $x_{i0}$  ( $x_{ik}$ ) — коэффициент при  $i$ -м векторе базиса в разложении вектора ограничений (вводимого вектора) по векторам старого базиса; минимум берется по тем индексам  $i$ , для которых  $x_{ik} > 0$ . Если  $\theta = \frac{x_{r0}}{x_{rk}}$ , то из базиса удаляется его  $r$ -й вектор.

Базисные компоненты нового плана определяются по формуле

$$x'_{i0} = \begin{cases} x_{i0} - \theta x_{ik}, & i \neq r, \\ \theta, & i = r. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для транспортной задачи коэффициенты  $x_{ik}$  равны нулю или  $\pm 1$ . При этом  $x_{ik} = 1$  ( $-1$ ) в том и только в том случае, если  $i$ -й вектор базиса  $K_X$  соответствует коммуникации, которая занимает нечетную (четную) позицию в построенном маршруте. Поэтому формула (3.2) в случае транспортной задачи может быть заменена правилом:  $\theta$  — минимальная нечетная перевозка маршрута, связывающего пункты  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$ . Это правило и используется в методе потенциалов. Формула (3.3) применительно к транспортной задаче превращается в правило изменения плана перевозок, употребляемое в методе потенциалов: перевозки, запланированные по нечетным

(четным) коммуникациям, уменьшаются (увеличиваются) на величину  $\theta$ , перевозка между  $A_i$  и  $B_j$  полагается равной  $\theta$ , остальные перевозки сохраняют свои значения.

Итак, метод потенциалов является детализацией второго алгоритма метода улучшения плана, учитывающей специфику транспортной задачи. Отличие состоит только в том, что на каждом шаге метода потенциалов все параметры задачи (план, предварительные потенциалы, коэффициенты разложения вводимого вектора коммуникаций) вычисляются не по рекуррентным формулам, как в методе улучшения плана, а непосредственно. Это оказывается более выгодным из-за простоты условий задачи  $T$ , позволяющей легко решать соответствующие системы линейных уравнений.

**3.2.** К методу потенциалов примыкает так называемый распределительный метод. Его основой является первый алгоритм метода улучшения плана. Реализация распределительного метода на каждой итерации связана с разложением всех векторов коммуникаций по векторам, составляющим базис данного плана. Таким образом, на каждой итерации метода *любая пара* пунктов  $A_i, B_j$  задачи  $T$  должна быть связана маршрутом из основных коммуникаций данного плана. Для транспортных задач небольших размеров, решаемых вручную, распределительный метод сравним по трудоемкости с методом потенциалов. Однако в задачах с большим числом пунктов метод потенциалов значительно эффективнее распределительного метода. Это связано с тем, что число переменных  $mn$  таких задач существенно превышает число ее условий  $m+n$ . Использование второго алгоритма метода улучшения плана для решения задачи облегчается также большой разреженностью ее матрицы условий: вычисление оценки вектора условий задачи  $T$  укладывается всего в две операции сложения (вычитания).

## § 4. Алгоритм метода потенциалов

**4.1.** Алгоритм метода потенциалов складывается из предварительного этапа и конечного числа однотипных итераций. На предварительном этапе строится исходный

опорный план  $X_0$  задачи  $T$  и составляется матрица

$$C_1 = \|c_{ij} - (v_j^{(0)} - u_i^{(0)})\|_{m, n},$$

где  $v_j^{(0)}$  и  $u_i^{(0)}$  — предварительные потенциалы, отвечающие исходному плану  $X_0$ .

На каждой итерации рассматриваются и преобразуются две матрицы

$$X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|_{m, n} \text{ и } C_k = \|c_{ij}^{(k)}\|_{m, n}.$$

Матрица  $X_k$  представляет собой опорный план задачи  $T$ , построенный в результате  $k$ -й итерации. Матрица  $C_k$  составлена из оценок векторов  $P_{ij}$  относительно базиса плана  $X_{k-1}$ , т. е.

$$C_k = \|c_{ij} - (v_j^{(k-1)} - u_i^{(k-1)})\|_{m, n},$$

где  $v_j^{(k-1)}$  и  $u_i^{(k-1)}$  — предварительные потенциалы, отвечающие плану  $X_{k-1}$ .

Вначале будем предполагать задачу  $T$  невырожденной. Необходимые замечания относительно вырожденного случая будут сделаны ниже.

**Предварительный этап.** С помощью метода северо-западного угла или разбираемого в § 6 метода минимального элемента определяется исходный опорный план  $X_0$  исследуемой задачи  $T$ . Далее, согласно правилам, изложенным при описании 1-го этапа метода потенциалов, вычисляем величины  $u_i^{(0)}$ ,  $v_j^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , и составляем матрицу

$$C_1 = \|c_{ij} - (v_j^{(0)} - u_i^{(0)})\|_{m, n}.$$

Если все элементы матрицы  $C_1$  неотрицательны, то  $X_0$  — решение задачи  $T$ . В противном случае переходим ко второму этапу, описание которого приводится ниже. Процесс вычисления предварительных потенциалов формализуется следующим образом. Пусть  $J_1$  — номера тех столбцов матрицы  $C$ , которые содержат  $X_0$ -существенные элементы в 1-й строке;  $I_1$  — номера строк матрицы

$C$ , кроме 1-й, которые содержат  $X_0$ -существенные элементы в столбцах с номерами  $J_1$ . Если множества  $J_\lambda$  и  $I_\lambda$  для  $\lambda=1, 2, \dots, r$  уже определены, то  $J_{r+1}$  объединяет номера тех столбцов матрицы  $C$ , не принадлежащих  $J_r$ , которые содержат  $X_0$ -существенные элементы в строках с номерами  $I_r$ , а  $I_{r+1}$  состоит из номеров строк этой матрицы, не включенных в  $I_r$  и содержащих  $X_0$ -существенные элементы в столбцах с номерами  $J_{r+1}$ . Образование множеств  $J_\lambda$  и  $I_\lambda$  производится до тех пор, пока процесс не прерывается получением пустого множества. Если  $i \in I_\lambda$ , то под  $j(i)$  будем понимать такой элемент множества  $J_\lambda$ , что  $c_{ij(i)}$  —  $X_0$ -существенный элемент  $C$ . Аналогично, для  $j \in J_\lambda$  определим  $i(j)$  как элемент  $I_{\lambda-1}$ , при котором  $c_{i(j)j}$  является  $X_0$ -существенным элементом  $C$ . Из опорности плана  $X_0$  следует, что множества  $J_\lambda$ , равно как и множества  $I_\lambda$ , не пересекаются. Невырожденность плана  $X_0$  приводит к тому, что объединение всех множеств  $J_\lambda$  есть  $(1, 2, \dots, n)$ , а объединение всех множеств  $I_\lambda$  составляет  $(2, 3, \dots, m)$ .

Полагаем  $u_i^{(0)} = 0$  и вычисляем

$$v_j^{(0)} = c_{ij} + u_i^{(0)} = c_{ij} \text{ для } j \in J_1.$$

Далее определяем

$$u_i^{(0)} = v_{j(i)}^{(0)} - c_{ij(i)} \text{ для } i \in I_1.$$

Аналогично вычисляются  $u_i^{(0)}$  для  $i \in I_2$  и  $v_j^{(0)}$  для  $j \in J_2$  и т. д. Таким образом, последовательно определяются  $v_j^{(0)}$  для  $j \in J_1$ ,  $u_i^{(0)}$  для  $i \in I_2, \dots, v_j^{(0)}$  для  $j \in J_{r-1}$ ,  $u_i^{(0)}$  для  $i \in I_r$  и т. д. до получения значений всех предварительных потенциалов.

4.2. Каждая итерация алгоритма состоит из двух этапов \*). Предположим, что уже приведено  $k$  итераций, в результате которых получен план  $X_k$  и матрица

$$C_k = \|c_{ij} - (v_j^{(k-1)} - u_i^{(k-1)})\|_{m, n}.$$

\*) Это относится ко всем итерациям, кроме первой, которая содержит лишь этап 2, и последней, состоящей из этапа 1.

Целью  $(k+1)$ -й итерации является формирование матрицы  $C_{k+1}$  и либо установление оптимальности плана  $X_k$ , либо построение нового, более экономичного плана  $X_{k+1}$ . Рассмотрим каждый из этапов  $(k+1)$ -й итерации.

**Этап 1.** На этапе 1 вычисляется матрица  $C_{k+1}$ , необходимая для проверки плана  $X_k$  на оптимальность. Процесс преобразования матрицы  $C_k$  в матрицу  $C_{k+1}$  состоит в следующем. Выбираем отрицательный  $X_k$ -существенный элемент матрицы  $C_k$ . Пусть это  $c_{\lambda\mu}^{(k)} = \delta_{k+1}$  (такой элемент обязательно существует и единствен, остальные  $X_k$ -существенные элементы  $C_k$  — нули, см. конец этапа 2). Выделим содержащую его строку и через  $G_1$  обозначим совокупность  $X_k$ -существенных элементов этой строки, не совпадающих с  $\delta_{k+1}$ . Затем выделим столбцы  $C_k$ , содержащие элементы  $G_1$  и через  $G_2$  обозначим множество  $X_k$ -существенных элементов, лежащих в этих столбцах и отличных от элементов  $G_1$ . Далее выделяются строки  $C_k$ , содержащие элемент  $G_2$ , и аналогично предыдущему вводится множество  $G_3$ . Процесс выделения строк и столбцов матрицы  $C_k$  продолжается до тех пор, пока очередное множество  $G$ , скажем  $G_l$ , не окажется пустым. Заметим, что, поскольку каждая строка (каждый столбец) не может быть выделена (выделен) более одного раза ( $X_k$  — опорный план!),  $l \leq n+m-1$ . Закончив выделение линий (строк или столбцов) матрицы  $C_k$ , приступим к построению матрицы  $C_{k+1}$ . Для этого величину  $\delta_{k+1}$  прибавим ко всем выделенным столбцам и вычтем из всех выделенных строк матрицы  $C_k$ . Очевидно, что матрица, полученная после указанных преобразований, имеет вид

$$\|c_{ij} + \alpha_i - \beta_j\|_{m,n}.$$

Кроме того, все ее  $X_k$ -существенные элементы — нули. Действительно, после вычитания  $\delta_{k+1}$  из  $\lambda$ -й строки  $C_k$  элемент  $c_{\lambda\mu}^{(k)}$  обращается в нуль, а все элементы  $G_1$  становятся равными  $-\delta_{k+1}$ . После прибавления  $\delta_{k+1}$  к столбцам элементов  $G_1$  эти элементы обращаются в нуль, а элементы  $G_2$  принимают значение  $\delta_{k+1}$ . Заметим,

что, поскольку линии  $C_k$  отмечаются не более одного раза, элементы  $G_1$  при дальнейших преобразованиях остаются равными нулю. Продолжая вычитать (из выделенных строк) и прибавлять (к выделенным столбцам) матрицы  $C_k$  величину  $\delta_{k+1}$ , обрашаем последовательно в нуль элементы  $G_2, G_3$  и т. д.

После  $l-1$  шагов все ненулевые  $X_k$ -существенные элементы  $C_k$  оказываются принадлежащими  $G_{l-1}$ . Пусть  $l$  — нечетное (четное) число. Поскольку  $G_l$  — пустое множество, все  $X_k$ -существенные элементы матрицы, полученной после вычитания (прибавления) величины  $\delta_{k+1}$  из строк (к столбцам) элементов  $G_{l-1}$ , равны нулю. Итак, величины  $\alpha_i, -\beta_j, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ , удовлетворяют системе (1.3), соответствующей плану  $X_k$ .

Следовательно,  $\alpha_i = u_i^{(k)}, \beta_j = v_j^{(k)}$  — предварительные потенциалы, соответствующие плану  $X_k$ , а

$$C_{k+1} = \|c_{ij} + \alpha_i - \beta_j\|_{m,n} = \|c_{ij} - (v_j^{(k)} - u_i^{(k)})\|_{m,n}.$$

Как нетрудно заметить, описанное правило отыскания предварительных потенциалов  $u_i^{(k)}, v_j^{(k)}$  или, что то же самое, матрицы  $C_{k+1}$ , базируется на определении разностей

$$u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}, v_j^{(k)} - v_j^{(k-1)}.$$

Предварительные потенциалы, отвечающие плану  $X_k$ , можно вычислять и непосредственно, решая систему (1.3). Формализация процесса решения этой системы была приведена при описании предварительного этапа (применительно к исходному плану  $X_0$ ).

Если все элементы матрицы  $C_{k+1}$  неотрицательны,  $X_k$  — искомое решение. Если же среди величин  $c_{ij}^{(k+1)}$  имеются отрицательные, необходим переход к этапу 2.

**4.3. Этап 2.** На этапе 2 производится улучшение плана  $X_k$ . Основой этапа является процесс составления цепочки из положительных элементов этого плана. Выберем наименьший элемент матрицы  $C_{k+1}$ , расположенный, скажем, на пересечении  $i_0$ -й строки и  $j_0$ -го столбца, и обозначим его через  $\Delta_{k+1}$ . По условию  $\Delta_{k+1} < 0$ . Переходим к поиску цепочки из положительных элементов

матрицы  $X_k$ , замыкающей на элементе  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  (очевидно,  $x_{i_0 j_0}^{(k)} = 0$ ). Соединим стрелками  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  со всеми положительными элементами его строки, совокупность которых обозначим через  $\bar{G}_1$ . Затем каждый из элементов  $\bar{G}_1$  соединим стрелками со всеми положительными элементами, расположенными в его столбце. Совокупность всех таких элементов обозначим через  $\bar{G}_2$ . Процесс образования множеств  $\bar{G}_k$  продолжается до тех пор, пока при некотором  $p$  ( $p$  — нечетное число) среди столбцов, содержащих элементы  $\bar{G}_p$ , обнаружится столбец с номером  $j_0$ . Заметим, что в силу опорности плана  $X_k$  множества  $\bar{G}_\lambda$ ,  $\bar{G}_\mu$ ,  $\lambda \neq \mu$ , не пересекаются, ибо в противном случае существовала бы замкнутая цепочка из ненулевых перевозок плана  $X_k$ . Это обстоятельство, а также то, что любые два пункта невырожденной задачи  $T$  могут быть соединены коммуникациями с ненулевыми (по плану  $X_k$ ) перевозками, служит доказательством существования введенного выше числа  $p \leq n + m - 1$ . Теперь уже нетрудно образовать искомую цепочку. От элемента  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  перейдем по столбцу к элементу  $x_{i_s j_0}^{(k)} \in \bar{G}_p$ . От  $x_{i_s j_0}^{(k)}$  по строке перейдем к соединенному с ним стрелкой элементу  $x_{i_s j_s}^{(k)} \in \bar{G}_{p-1}$  и т. д. Двигаясь таким образом вдоль намеченных стрелок по строкам и столбцам матрицы  $X_k$ , получим в конце концов последовательность положительных элементов этой матрицы вида

$$x_{i_0 j_1}^{(k)}, x_{i_1 j_1}^{(k)}, \dots, x_{i_s j_s}^{(k)}, x_{i_s j_0}^{(k)} \quad (2s + 1 = p), \quad (4.1)$$

образующую цепочку, которая замыкается на элементе  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$ .

Построение цепочки (4.1) можно осуществить также с помощью метода вычеркивания строк. Для этого, как указывалось в п. 3.5 гл. 3, вводится множество  $\Gamma$ , состоящее из положительных элементов матрицы  $X_k$  и ее элемента  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$ .

Из матрицы  $X_k$  вычеркиваются строки, содержащие менее двух элементов множества  $\Gamma$ . Затем из оставшейся части  $X_k$  вычеркиваются столбцы, в которых

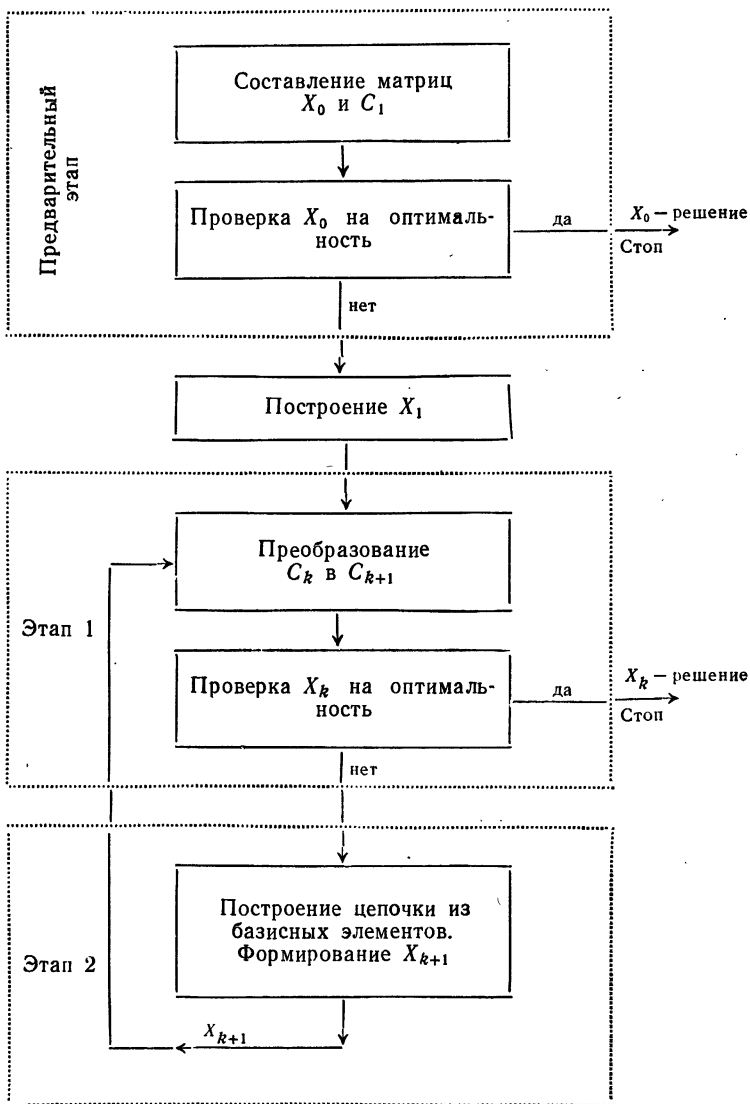


Рис. 4.1. Блок-схема алгоритма метода потенциалов для задачи типа  $T$

содержится менее двух элементов  $\Gamma$ . После этого снова возвращаются к строкам, затем к столбцам и т. д.

Элементы матрицы  $X_k$ , оставшиеся после процесса вычеркивания, составляют искомую цепочку. Обоснование и более подробное изложение процесса вычеркивания содержится в п. 3.5 гл. 3. Построив цепочку (4.1), легко сформировать новый план  $X_{k+1}$ .

Обозначим совокупность пар индексов  $(i_\mu, j_{\mu+1})$ ,  $\mu=0, 1, \dots, s$  ( $j_{s+1}=j_0$ ) через  $I_1$ , а множество пар индексов вида  $(i_\mu, j_\mu)$ ,  $\mu=1, 2, \dots, s$ , — через  $I_2$ . Положим

$$\theta_{k+1} = \min_{0 \leq \mu \leq s} x_{i_\mu j_{\mu+1}}^{(k)}. \quad (4.2)$$

Новый план  $X_{k+1}$  определяется согласно правилу

$$x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \theta_{k+1}, & i, j = i_0, j_0, \\ x_{ij}^{(k)} - \theta_{k+1}, & i, j \in I_1, \\ x_{ij}^{(k)} + \theta_{k+1}, & i, j \in I_2, \\ x_{ij}^{(k)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Другими словами, из нечетных элементов цепочки (4.1) вычитается  $\theta_{k+1}$ , к четным элементам цепочки и к элементу  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$  величина  $\theta_{k+1}$  прибавляется, остальные элементы плана  $X_k$  сохраняют свои прежние значения.

Итак, в результате  $(k+1)$ -й итерации мы перешли от плана  $X_k$  и матрицы оценок

$$C_k = \|c_{ij} - (v_j^{(k-1)} - u_i^{(k-1)})\|_{m,n}$$

к улучшенному плану  $X_{k+1}$  и к новой матрице

$$C_{k+1} = \|c_{ij} - (v_j^{(k)} - u_i^{(k)})\|_{m,n}.$$

Из способа построения плана  $X_{k+1}$  следует, что среди  $X_{k+1}$ - существенных элементов  $C_{k+1}$  лишь один  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)}$  не равен нулю. Блок-схема алгоритма метода потенциалов приведена на рис. 4.1.

## § 5. Пример

Приведем пример использования метода потенциалов.

Требуется решить транспортную задачу, условия которой определяются таблицей

		Пункты потребления				
		1	2	3	4	
Пункты производства	1	7	8	5	3	11
	2	2	4	5	9	11
	3	6	3	1	2	8
		Объем потребления				
		5	9	9	7	

Анализируя объемы производства и потребления различных пунктов задачи, убеждаемся в ее невырожденности. Поэтому для решения можно использовать рассмотренный в предыдущих пунктах алгоритм метода потенциалов. Прежде чем приступить к выкладкам, сделаем несколько замечаний. Для наглядности  $X_k$ -существенные элементы матрицы  $C_k$  будем отмечать черточками. При вычислении матрицы  $C_k$  удобно помещать  $-\delta_k$  справа от выделенных строк матрицы  $C_{k-1}$ , а под выделенными столбцами  $C_{k-1}$  ставить  $+\delta_k$ . Процесс выделения строк и столбцов матриц  $C_k$  отмечается стрелками.

Минимальный элемент матрицы  $C_k$  (элемент  $\Delta_k$ ), который определяет начало цепочки в плане  $X_k$ , будем обводить рамкой. Элементы цепочки в  $X_k$  помечаются звездочками. После каждой итерации выписывается соответствующее значение линейной формы задачи (транспортных издержек)  $L_k$ . Заметим, что для контроля полезно вычислять  $L_k$  двумя способами: непосредственно

и по рекуррентной формуле

$$L_k = L_{k-1} + \theta_k \Delta_k.$$

Предварительный этап. Исходный опорный план рассматриваемой задачи определяем методом северо-западного угла

5	6	0	0		11	6	0	0	0	0	0
0	3	8	0		11	11	11	8	0	0	0
0	0	1	7		8	8	8	8	8	7	0
<hr/>											
5	9	9	7								
0	9	9	7								
0	3	9	7								
0	0	9	7								
0	0	1	7								
0	0	0	7								
0	0	0	0								

$$X_0 = \left\| \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right\|.$$

Суммарные транспортные издержки, соответствующие  $X_0$ , составляют  $L_0 = 150$  ед.

Далее составляем матрицу

$$C_1 = \| c_{ij} - (v_i^{(0)} - u_j^{(0)}) \|_{3,4}.$$

Анализируя  $X_0$ -существенные элементы матрицы  $C$ , образуем множества номеров  $I_\lambda, J_\lambda$ . Имеем

$$J_1 = \{1, 2\}, I_1 = \{2\}, J_2 = \{3\}, I_2 = \{3\}, J_3 = \{4\}.$$

Полагаем  $u_1^{(0)} = 0$  и последовательно вычисляем:

$$v_1^{(0)} = 7 + 0 = 7, \quad v_2^{(0)} = 8 + 0 = 8,$$

$$u_2^{(0)} = v_2^{(0)} - 4 = 4, \quad v_3^{(0)} = 5 + u_2^{(0)} = 9,$$

$$u_3^{(0)} = v_3^{(0)} - 1 = 8, \quad v_4^{(0)} = 2 + u_3^{(0)} = 10.$$

Матрица  $C_1$  имеет вид

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & \boxed{-7} \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Итерация I. Этап 1. Отсутствует, так как  $C_1$  уже определена.

Этап 2.

$$x_0 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^* & 8^* \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} \xrightarrow{\theta_1=6} x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix},$$

$$L_1 = 108.$$

Итерация II. Этап 1.

$$C_1 = \begin{vmatrix} \bar{0} & 0 & -4 & \bar{-7} \\ -1 & \bar{0} & \bar{0} & 3 \\ 7 & 3 & \bar{0} & \bar{0} \end{vmatrix} \xrightarrow{+7} C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 & 0 \\ \boxed{-8} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

-7

Этап 2.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 5^* & 0 & 0 & 6^* \\ 0 & 9 & 2^* & 0 \\ 0 & 0 & 7^* & 1^* \end{vmatrix} \xrightarrow{\theta_2=1} x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L_2 = 100.$$

## Итерация III. Этап 1.

$$C_2 = \left\| \begin{array}{cccc} \bar{0} & 7 & 3 & \bar{0} \\ -8 & \bar{0} & \bar{0} & 3 \\ 0 & 3 & \bar{0} & 0 \end{array} \right\| \xrightarrow{+8} C_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 8 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right\|.$$

-8   -8

## Этап 2.

$$X_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 4^* & 0 & 0 & 7 \\ 1^* & 9 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right\| \xrightarrow{\theta_3=1} X_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right\|,$$

$L_3 = 5.$

## Итерация IV. Этап 1.

$$C_3 = \left\| \begin{array}{cccc} \bar{0} & -1 & -5 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 0 & 11 \\ 8 & 3 & \bar{0} & 8 \end{array} \right\| \xrightarrow{+5} C_4 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 3 & \boxed{-2} & 0 & 3 \end{array} \right\|.$$

-5   -5   -5

## Этап 2.

$$X_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 3^* & 0 & 1^* & 7 \\ 2^* & 9^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^* & 0 \end{array} \right\| \xrightarrow{\theta_4=3} X_4 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right\|,$$

$L_4 = 89.$

## Итерация V. Этап 1.

$$C_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 5 & 11 \\ 3 & -\bar{2} & \bar{0} & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{+2 \\ -2 \quad -2}]{+2} C_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Все элементы матрицы  $C_5$  неотрицательны. Следовательно,

$$x_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— искомое} \\ \text{решение} \\ \text{задачи.} \end{array}$$

Поясним течение отдельных итераций метода. Поскольку среди элементов матрицы  $C_1$  имеются отрицательные, план  $X_0$  не является оптимальным и необходим переход к итерации I. Итерация I содержит лишь этап 2 (первый этап, состоящий в построении матрицы  $C_1$ , уже проведен).

Выбираем минимальный элемент  $c_{14}^{(1)} = -7 = \Delta_1$  матрицы  $C_1$  и приступаем к построению цепочки из положительных элементов матрицы  $X_0$ , замыкающейся на  $x_{14}^{(0)}$ . В соответствии с алгоритмом соединяем стрелками  $x_{14}^{(0)}$  с положительными элементами первой строки матрицы  $X_0$  — элементами  $x_{11}^{(0)}$ ,  $x_{12}^{(0)}$  (они составляют множество  $\bar{G}_1$ ). В столбцах, исходящих из элементов  $\bar{G}_1$  (столбцы 1, 2), имеется всего один положительный элемент, не принадлежащий  $\bar{G}_1$  (элемент  $x_{22}^{(0)}$ ). Этот элемент, составляющий множество  $\bar{G}_2$ , соединяется стрелкой с  $x_{12}^{(0)} \in \bar{G}_1$ . Каждое из последующих множеств  $\bar{G}_3$ ,  $\bar{G}_4$ ,  $\bar{G}_5$ , как нетрудно заметить, содержит по одному элементу. Поскольку единственный элемент множества  $\bar{G}_5$  (элемент  $x_{34}^{(0)}$ ) расположен в одном столбце с  $x_{14}^{(0)}$ , процесс образования множеств  $\bar{G}_i$  прекращается. Теперь нетрудно построить искомую цепочку: двигаемся от  $x_{34}^{(0)}$  по

строке до соединенного с ним (стрелкой) элемента  $x_{33}^{(0)}$ . Затем от  $x_{33}^{(0)}$  переходим по столбцу к  $x_{23}^{(0)}$ . Далее включаем в цепочку элементы  $x_{22}^{(0)}, x_{12}^{(0)}$ . Итак, цепочка матрицы  $X_0$  составляется из элементов  $x_{12}^{(0)}, x_{22}^{(0)}, x_{23}^{(0)}, x_{33}^{(0)}, x_{34}^{(0)}$  (в матрице  $X_0$  они отмечаются звездочками). Переходим к построению нового плана  $X_1$ . Для этого из нечетных элементов, составляющих цепочку, выбираем минимальный  $\theta_1 = \min\{6, 8, 7\} = 6$ . Далее к четным элементам цепочки ( $x_{22}^{(0)}, x_{33}^{(0)}$ ) и элементу  $x_{14}^{(0)}$ , на котором она замыкается, прибавляем 6; из нечетных элементов цепочки вычитаем 6. Получаем новый план  $X_1$ , соответствующий транспортным издержкам  $L_1 = 108$ . Величину  $L_1$  можно подсчитать двумя способами:

$$L_1 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}^{(1)}.$$

или

$$L_1 = L_0 + \theta_1 \Delta_1.$$

Итерация I закончена.

Итерация II содержит как этап 1, так и этап 2. На первом этапе план  $X_1$  проверяется на оптимальность. Для этого матрица  $C_1$  преобразуется в матрицу  $C_2$ . Прежде всего в матрице  $C_1$  отмечаются (черточками)  $X_1$ -существенные элементы. Единственным ненулевым  $X_1$ -существенным элементом  $C_1$  является  $c_{14}^{(1)} = \delta_2 = -7$ . Далее в соответствии с алгоритмом переходим к построению множеств  $G_i$ , которые отмечаются стрелками в матрице  $C_1$ . Множество  $G_1$  состоит из одного элемента  $c_{11}^{(1)}$ . Поскольку в столбце, содержащем  $c_{11}^{(1)}$  (первый столбец матрицы  $C_1$ ), нет  $X_1$ -существенных элементов, отличных от  $c_{11}^{(1)}$ , множество  $G_2$  не содержит ни одного элемента, процесс образования множеств  $G_i$  прерывается. Выделяем строчку матрицы  $C_1$ , содержащую  $c_{14}^{(1)}$  (строка 1), и столбец, в котором расположен единственный элемент  $G_1$  (столбец 1). Вычитая из первой строки матрицы  $C_1$  число  $\delta_2 = -7$  и прибавляя  $\delta_2$  к первому столбцу этой матрицы, получаем матрицу  $C_2$ . Поскольку не все элементы матрицы  $C_2$  неотрицательны ( $c_{21}^{(2)} = -8$ ),

план  $X_1$  не является решением задачи. На втором этапе итерации II строится план  $X_2$ , более экономный по сравнению с  $X_1$ . Для этого из положительных элементов  $X_1$  составляется цепочка, замыкающаяся на  $x_{21}^{(1)} (c_{21}^{(2)} = \Delta_2 = -8 - \text{минимальный элемент матрицы } C_2)$ :

$$x_{23}^{(1)}, x_{33}^{(1)}, x_{34}^{(1)}, x_{14}^{(1)}, x_{11}^{(1)},$$

$$\theta_2 = \min \{x_{23}^{(1)}, x_{34}^{(1)}, x_{11}^{(1)}\} = \min \{2, 1, 5\} = 1.$$

Поэтому для получения плана  $X_2$  необходимо из нечетных элементов цепочки вычесть 1, к четным ее элементам и элементу  $x_{21}^{(1)}$  прибавить 1. Новый план соответствует транспортным издержкам

$$L_2 = L_1 + \theta_2 \Delta_2 = 108 - 8 = 100.$$

Следующие две итерации также содержат по два этапа.

Завершающей является итерация V. Она содержит лишь этап 1, на котором устанавливается оптимальность плана  $X_4$ , построенного на втором этапе итерации IV.

## § 6. Метод минимального элемента определения опорного плана транспортной задачи

**6.1.** Число итераций, необходимых для решения транспортной задачи методом потенциалов, существенно зависит от вида первоначального плана. Удачный выбор исходного плана (первого приближения) может значительно сократить количество итераций и тем самым ускорить решение задачи. Поэтому важно иметь достаточно простой метод, позволяющий строить план, в большинстве случаев близкий к оптимальному. В предыдущей главе был описан один из методов построения плана задачи — метод северо-западного угла. Однако план, определяемый с помощью рассмотренного метода, зависит лишь от объемов производства и потребления пунктов задачи и абсолютно не связан с матрицей транспортных издержек, вследствие чего этот план обычно значительно уклоняется от оптимального. Вместе с тем ценой небольших усложнений можно модифицировать метод северо-западного угла, увязав естественным образом

алгоритм построения плана со стоимостью перевозок. Эту модификацию обычно называют *методом минимального элемента* (смысл названия станет ясен из приводимого ниже описания метода).

Метод минимального элемента состоит из последовательно проводимых шагов.

**Шаг 1.** Определяем минимальный элемент матрицы транспортных издержек  $C$ . Если им оказался  $c_{i_1 j_1}$ , то полагаем  $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$ . Возможны два случая:

$$1) a_{i_1} \leq b_{j_1};$$

$$2) a_{i_1} > b_{j_1}.$$

В первом случае определяем элементы  $i_1$ -й строки матрицы (плана)  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$ , полагая  $x_{i, j} = 0$ ,  $j \neq j_1$ ; во втором — элементы  $j_1$ -го столбца этой матрицы:

$$x_{i j_1} = 0, \quad i \neq i_1.$$

**Шаг 2.** Пусть  $C_1$  — матрица, полученная из  $C$  вычеркиванием либо  $i_1$ -й строки (случай 1), либо  $j_1$ -го столбца (случай 2).

Положим

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, & i \neq i_1, \\ a_i - x_{i j_1}, & i = i_1; \end{cases} \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, & j \neq j_1, \\ b_j - x_{i_1 j}, & j = j_1. \end{cases}$$

Очевидно, что общее число строк и столбцов матрицы  $C_1$  на единицу меньше числа строк и столбцов матрицы  $C$ . Второй шаг состоит в проведении уже описанных операций применительно к матрице  $C_1$  и величинам  $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$ . В результате этого шага заполняется еще одна линия (строка или столбец) матрицы  $X$ . Затем следует шаг 3 и т. д.

Процесс продолжается до полного заполнения матрицы  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$ . Обоснование метода минимального элемента ничем существенным не отличается от приведенного в предыдущей главе обоснования метода северо-западного угла.

Метод минимального элемента всегда приводит к опорному плану исследуемой задачи  $T$ . Число шагов, необходимых для построения плана транспортной задачи с  $m$  пунктами производства и  $n$  пунктами потребления, равно  $n + m - 1$ . Заметим, что каждый

последующий шаг связан с меньшим количеством операций по сравнению с предыдущим.

**6.2.** Применим метод минимального элемента к транспортной задаче, решенной в § 5:

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 8^{(6)} & 5^{(5)} & 3^{(3)} \\ 2^{(2)} & 4^{(4)} & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1^{(1)} & 2 \end{vmatrix}.$$

$$X = \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 1 & 7 & 11 & 11 & 11 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 11 & 11 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 9 & 9 & 7 & & & & & & \\ 5 & 9 & 1 & 7 & & & & & & \\ 0 & 9 & 1 & 7 & & & & & & \\ 0 & 9 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 3 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}$$

Итак,

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для наглядности элемент матрицы  $C$ , оказавшийся минимальным на  $k$ -м шаге, снабжен сверху индексом ( $k$ ). Транспортные издержки построенного плана, как легко подсчитать, составляют 92 единицы и отличаются от минимальных всего на 3%. Применение к этой задаче метода северо-западного угла приводит, как мы видели, к плану с суммарными транспортными издержками в 150 единиц, отличающимися от минимальных на 68%.

Если в качестве первого приближения в задаче § 5 взять только что построенный план, то ее решение уложится в неполные две итерации (вместо пяти итераций, имевших место ранее). Расчеты показывают, что в большинстве случаев метод минимального элемента позволяет получить достаточно хорошее первое приближение. Однако это вовсе не означает, что описанный метод

во всех случаях дает лучшие результаты по сравнению с методом северо-западного угла. Приведем соответствующий пример. Рассмотрим транспортную задачу, определяемую таблицей

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 5 & 7 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 11 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ \hline 5 & 8 & 9 & 7 & \end{array} \quad (6.1)$$

План задачи (6.1), построенный методом минимального элемента, имеет вид

$$X_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

и приводит к транспортным издержкам  $L_1 = 115$  ед. Применяя же к этой задаче метод северо-западного угла, приходим к плану

$$X_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix},$$

связанному с транспортными издержками  $L_2 = 107$  ед. Таким образом, для рассматриваемой транспортной задачи план, построенный методом северо-западного угла, оказался предпочтительнее плана, определенного методом минимального элемента. Как нетрудно проверить, план  $X_2$  является решением задачи (6.1). Таким образом, хотя метод минимального элемента и приводит в данном случае к худшему по сравнению с  $X_2$  плану, связанные с ним транспортные издержки отличаются от минимальных всего на 7,5%.

## § 7. Вычислительные особенности метода потенциалов в вырожденном случае

7.1. В § 2 метод потенциалов был распространен на произвольную транспортную задачу (в том числе на вырожденную). Оказалось, что для этого достаточно оперировать с обобщенными объемами производства и

потребления, обобщенными перевозками и обобщенными транспортными расходами. Каждая обобщенная величина задается упорядоченной парой чисел. При этом, как уже отмечалось, обобщенное число  $a_1/a_2$  считается большим обобщенного числа  $b_1/b_2$ , если  $a_1 > b_1$ , либо  $a_1 = b_1$ , однако  $a_2 > b_2$ .

Применение метода потенциалов к рассматриваемой модификации транспортной задачи ничем не отличается от его использования для решения невырожденной задачи  $T$ .

Отсюда следует, что алгоритм метода потенциалов для вырожденной задачи, исключающий возможность закливания, представляет собой обычный алгоритм этого метода, примененный к соответствующей модифицированной задаче.

Для иллюстрации сказанного приведем численный пример. Требуется найти решение транспортной задачи с матрицей транспортных издержек

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

все объемы производства и потребления которой равны единице. Как нетрудно видеть, данная задача является вырожденной. Соответствующая модифицированная задача определяется таблицей

		Пункты потребления			
		1	2	3	
Пункты производ- ства	1	2	3	4	1/1
	2	1	5	7	1/1
	3	2	4	1	1/1
		1/0	1/0	1/3	
		Обобщенные объемы потребления			

Определим исходный обобщенный план методом северо-западного угла

$$x_0/\alpha_0 = \left\| \begin{array}{ccc} 1/0 & 0/1 & 0 \\ 0 & 1/-1 & 0/2 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\|.$$

Отмечая в матрице  $C$   $X_0/\alpha_0$ -существенные элементы и решая соответствующие уравнения, находим

$$u_1^{(0)} = 0, \quad u_2^{(0)} = -2, \quad u_3^{(0)} = 4,$$

$$v_1^{(0)} = 2, \quad v_2^{(0)} = 3, \quad v_3^{(0)} = 5,$$

откуда

$$C_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{array} \right\|.$$

Сохраняя обозначения § 5, приступим к проведению итераций.

Итерация I. Этап 1 отсутствует.

Этап 2.

$$x_0/\alpha_0 = \left\| \begin{array}{ccc} 1^*/0 & 0^*/1 & 0 \\ 0 & 1^*/-1 & 0/2 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\theta_1 = 1/-1} x_1/\alpha_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0/1 & 1/0 & 0 \\ 1/-1 & 0 & 0/2 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\|.$$

Итерация II. Этап 1.

$$C_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \bar{0} & \bar{0} & -1 \\ -3 & 0 & \bar{0} \\ 4 & 5 & \bar{0} \end{array} \right\| \xrightarrow{+3} C_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{array} \right\|.$$

Этап 2.

$$x_1/\alpha_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0^*/1 & 1/0 & 0 \\ 1^*/-1 & 0 & 0^*/2 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\vartheta_2=0/1} x_2/\alpha_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1/0 & 0/1 \\ 1/0 & 0 & 0/1 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\|.$$

Итерация III. Этап 1.

$$c_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \bar{0} & -\bar{4} \\ \bar{0} & 3 & \bar{0} \\ 7 & 8 & \bar{0} \end{array} \right\| \xrightarrow{+4} c_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 7 & 4 & 0 \end{array} \right\|.$$

-4

Этап 2.

$$x_2/\alpha_2 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1^*/0 & 0^*/1 \\ 1/0 & 0 & 0^*/1 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\vartheta_3=0/1} x_3/\alpha_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1/-1 & 0/2 \\ 1/0 & 0/1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{array} \right\|.$$

Итерация IV. Этап 1.

$$c_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 4 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & -\bar{1} & 0 \\ 7 & 4 & \bar{0} \end{array} \right\| \xrightarrow{+1} c_4 = \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{array} \right\|.$$

-1

Этап 2 отсутствует, так как  $X_3/\alpha_3$  — оптимальный обобщенный план. Искомое решение транспортной задачи

$$x_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Заметим, что последние три итерации служили, по существу, для выяснения оптимальности плана

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| ,$$

который был построен в первой итерации.

**7.2.** В заключение дадим практическую рекомендацию для решения вырожденных задач. На практике вырожденные транспортные задачи встречаются довольно часто.

Существуют важные классы транспортных задач, в которых каждый опорный план является распадающимся. Примером может послужить задача выбора, каждый опорный план которой содержит  $n$  положительных перевозок (вместо  $2n-1$ ). Однако образование цикла в транспортной задаче — явление чрезвычайно редкое. Поэтому вместо довольно громоздкого правила для выбора перевозки, подлежащей переводу в небазисные, которое основано на переходе к модифицированной задаче, естественно использовать более простые, хотя и менее надежные критерии. Одним из таких критериев является, например, следующий: на каждом шаге в небазисные переводится та минимальная нечетная перевозка цепочки, которая связана с пунктом производства, имеющим наименьший номер.

Приведенное правило не дает полной гарантии от заикливания. Однако практически образование цикла маловероятно.

В вырожденном случае некоторые базисные перевозки могут быть нулями. Поэтому при использовании алгоритма метода потенциалов с упрощенным правилом для выбора перевозки, подлежащей исключению из числа базисных, следует помнить, что роль положительных перевозок в общем случае играют базисные. При этом, естественно, изменяется определение  $X$ -существенного элемента матрицы  $C$ : элемент  $c_{ij}$  является  $X$ -существенным, если  $x_{ij}$  — базисная перевозка опорного плана  $X$ .

С учетом указанных изменений алгоритм метода потенциалов, изложенный в пп. 4.1—4.3, одинаково применим как к невырожденным, так и к вырожденным транспортным задачам.

## § 8. Метод потенциалов для транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций

8.1. Как известно (см. гл. 7 [52]), метод последовательного улучшения плана может быть распространен на задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями, причем трудоемкость отдельной итерации почти не увеличивается по сравнению со случаем односторонних ограничений. Приведенные там соображения могут послужить основой для приспособления любого специального алгоритма линейного программирования, базирующегося на методе улучшения плана, к анализу аналогичных моделей, осложненных двусторонними ограничениями на переменные. Это, в частности, относится и к методу потенциалов. В этом параграфе мы расширим возможности метода потенциалов, показав, что с его помощью могут решаться транспортные задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций (задача типа  $T_d$ ).

Процесс решения произвольной задачи  $T_d$  методом потенциалов состоит из серии однотипных итераций. (Предполагается, что исходный план задачи задан). Каждая итерация распадается на два этапа. На первом этапе проверяется на оптимальность опорный план, полученный в конце предыдущей итерации. В случае неоптимальности этого плана проводится второй этап, на котором строится новый опорный план, приводящий к меньшим транспортным издержкам. Как видим, общая схема метода потенциалов применительно к задачам  $T_d$  остается такой же, как и в случае обычной транспортной задачи.

Напомним, что для задачи типа  $T_d$  роль положительных перевозок играют перевозки, заключенные строго между нулем и значением пропускной способности со-

ответствующей коммуникации, т. е. такие перевозки  $x_{ij}$ , для которых выполняются неравенства

$$0 < x_{ij} < d_{ij}. \quad (8.1)$$

В связи с этим, переходя к задаче  $T_d$ , мы должны естественным образом изменить те определения, относящиеся к задаче  $T$ , в которых используется понятие положительной перевозки.

Как уже отмечалось, коммуникация  $\overrightarrow{A_i B_j}$  задачи  $T_d$  называется основной коммуникацией плана  $X$ , если перевозка  $x_{ij}$  этого плана удовлетворяет неравенствам (8.1). То же относится и к определению  $X$ -существенного элемента некоторой матрицы: элемент  $c_{ij}$  матрицы  $C$  называется  $X$ -существенным, если перевозка  $x_{ij}$  удовлетворяет условию (8.1). Аналогичные изменения должны быть внесены и в определения других понятий, связанных с задачей  $T$ , таких, как опорный план, невырожденный опорный план, базисная перевозка и т. п. Мы не будем приводить формулировки этих определений применительно к задаче  $T_d$ , поскольку принцип их получения совершенно ясен; тем более, что большинство из них уже указывалось в гл. 3.

8.2. Перейдем к описанию отдельной итерации метода, ограничив себя случаем невырожденной задачи. Пусть, как обычно, уже проведено  $k$  итераций, причем последняя из них привела к опорному плану

$$X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|_{m, n}.$$

На первом этапе  $(k+1)$ -й итерации вычисляются предварительные потенциалы пунктов задачи и с их помощью производится проверка плана  $X_k$  на оптимальность.

Предварительные потенциалы

$$u_i^{(k)}, v_j^{(k)}$$

определяются из системы уравнений

$$v_j^{(k)} - u_i^{(k)} = c_{ij}^{(k)} \quad (8.2)$$

для всех  $X_k$ -существенных элементов  $c_{ij}^{(k)}$  матрицы транспортных издержек  $C_k$ .

Решение системы (8.2) осуществляется точно так же, как и для случая задачи  $T$ . Далее составляется матрица

$$C_{k+1} = \|c_{ij} - (v_j^{(k)} - u_i^{(k)})\|_{m, n} = \|c_{ij}^{(k+1)}\|_{m, n}$$

и просматриваются знаки ее ненулевых элементов.

Пусть  $\Gamma_k^{(0)} (\Gamma_k^{(d)})$  — множество элементов  $C_{k+1}$ , соответствующих значению  $x_{ij}^{(k)} = 0$  ( $x_{ij}^{(k)} = d_{ij}$ ). Если

$$c_{ij}^{(k+1)} \geq 0 \quad \text{для всех} \quad c_{ij}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(0)} \quad (8.3)$$

и

$$c_{ij}^{(k+1)} \leq 0 \quad \text{для всех} \quad c_{ij}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(d)}, \quad (8.4)$$

то план  $X_k$  — решение исследуемой задачи. Этот вывод непосредственно следует из критерия оптимальности плана задачи  $T_d$ , установленного в гл. 3 (теорема 2.2).

Если же одно из неравенств системы (8.3) — (8.4) оказывается нарушенным, то план  $X_k$  может быть улучшен. Процесс улучшения плана  $X_k$  составляет второй этап итерации.

Допустим, что среди чисел

$$c_{ij}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(0)} \quad \text{и} \quad -c_{ij}^{(k+1)}, \quad c_{ij}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(d)}$$

имеются отрицательные, и пусть  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)}$  — наименьшее из этих чисел (или одно из них). Построим цепочку из базисных перевозок плана  $X_k$ , замыкающуюся на перевозке  $x_{i_0 j_0}^{(k)}$ . Пусть эта цепочка состоит из базисных перевозок

$$x_{i_0 j_1}^{(k)}, x_{i_1 j_1}^{(k)}, \dots, x_{i_s j_s}^{(k)}, x_{i_s j_0}^{(k)}. \quad (8.5)$$

Возможны два случая:

а)  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(0)}$ ,

б)  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(d)}$ .

Дальнейшее течение этапа 2 определяется тем, какой из этих случаев имеет место.

а) Если  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(0)}$  (т. е.  $x_{i_0 j_0}^{(k)} = 0$ ), то улучшение плана  $X_k$  производится путем введения перевозки между пунктами  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$ .

Определим

$$\theta'_k = \min_{0 \leq \lambda \leq s} x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)} \quad (j_{s+1} = j_0), \quad (8.6)$$

$$\theta''_k = \min_{1 \leq \lambda \leq s} (d_{i_\lambda j_\lambda} - x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)}) \quad (8.7)$$

и положим

$$\theta_k = \min(\theta'_k, \theta''_k, d_{i_0 j_0}). \quad (8.8)$$

Для получения более экономного плана нужно внести следующие изменения в план  $X_k$ : нечетные перевозки цепочки (8.5) уменьшить на  $\theta_k$ , четные перевозки цепочки и перевозку между пунктами  $A_{i_0}$ ,  $B_{j_0}$  увеличить на  $\theta_k$ . Нетрудно проверить, что в результате будет получен опорный план задачи  $T_d$ , который мы и обозначим через  $X_{k+1}$ .

б) Если  $c_{i_0 j_0}^{(k+1)} \in \Gamma_k^{(d)}$  (другими словами,  $x_{i_j j}^{(k)} = d_{i_j j}$ ), то улучшение плана  $X_k$  производится за счет сокращения размера перевозки между пунктами  $A_{i_c}$  и  $B_{j_0}$ .

Определим

$$\theta'_k = \min_{0 \leq \lambda \leq s} (d_{i_\lambda j_{\lambda+1}} - x_{i_\lambda j_{\lambda+1}}^{(k)}) \quad (j_s = j_0), \quad (8.9)$$

$$\theta''_k = \min_{1 \leq \lambda \leq s} x_{i_\lambda j_\lambda}^{(k)} \quad (8.10)$$

и положим, как и в предыдущем случае,

$$\theta_k = \min(\theta'_k, \theta''_k, d_{i_0 j_0}). \quad (8.11)$$

Увеличим нечетные перевозки цепочки (8.5) на величину  $\theta_k$ , а четные перевозки цепочки и перевозку между  $A_{i_0}$  и  $B_{j_0}$  сократим на эту величину. В результате образуется новый опорный план  $X_{k+1}$ .

Можно проверить, что

$$L_{k+1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^{(k+1)} = L_k - \theta_k (-1)^v c_{i_0 j_0}^{(k+1)}. \quad (8.12)$$

Здесь величина  $\theta_k$  вычисляется по формулам (8.6)—(8.8) или (8.9)—(8.11), а  $v$  равно 0 или 1 в зависимости от того, имеет место случай а) или б).

Поскольку при невырожденной ситуации  $\theta_k > 0$ , то из соотношения (8.12) вытекает, что

$$L_{k+1} < L_k.$$

Итак, результатом  $(k+1)$ -й итерации является либо установление оптимальности плана  $X_k$ , либо построение нового опорного плана  $X_{k+1}$ , связанного с меньшим значением суммарных транспортных издержек. При этом, очевидно, трудоемкость отдельной итерации метода потенциалов применительно к задаче  $T_d$  практически не увеличилась. Если исходный опорный план задачи  $T_d$  найден, то через конечное число итераций метод приводит к ее решению (последнее заключение следует, как обычно, из монотонного убывания транспортных расходов и конечности числа опорных планов задачи).

8.3. Для того чтобы начать процесс решения задачи  $T_d$  методом потенциалов, необходимо предварительно найти один из ее опорных планов. Как известно, задача типа  $T_d$  может не иметь ни одного плана: ограниченные пропускные способности коммуникаций в некоторых случаях препятствуют полному удовлетворению всех пунктов потребления за счет возможностей пунктов производства.

Излагаемый в настоящем пункте способ дает возможность либо построить достаточно экономный опорный план задачи  $T_d$ , либо убедиться в ее неразрешимости.

Процесс построения исходного опорного плана складывается из предварительного этапа, напоминающего метод минимального элемента, и ряда итераций метода потенциалов, применяемого к так называемой расширенной задаче. Предварительный этап разбивается на несколько однотипных шагов. Содержание первого шага состоит в следующем.

Среди элементов матрицы транспортных издержек  $C$  выбираем минимальный. Если этим элементом является  $c_{i_1, j_1}$ , то находим

$$x_{i_1, j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1}, d_{i_1, j_1}).$$

Возможны три случая:

$$x_{i_1, j_1} = a_{i_1}, \quad x_{i_1, j_1} = b_{j_1}, \quad x_{i_1, j_1} = d_{i_1, j_1}.$$

В первом случае определяем элементы  $i_1$ -й строки матрицы  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$ , полагая  $x_{ij} = 0$  для всех  $j \neq j_1$ . Во втором случае фиксируем элементы  $j_1$ -го столбца этой матрицы:  $x_{ij_1} = 0$  для всех  $i \neq i_1$ . В последнем случае на данном шаге определяется только один элемент матрицы  $X$  (элемент  $x_{i_1 j_1}$ ). Далее вычеркиваем из матрицы  $C$  либо  $i_1$ -ю строку (случай 1), либо  $j_1$ -й столбец (случай 2), либо элемент  $c_{i_1 j_1}$  (случай 3) и преобразуем величины  $a_i, b_j$  в

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, & i \neq i_1 \\ a_{i_1} - x_{i_1 j_1}, & i = i_1; \end{cases} \quad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, & j \neq j_1, \\ b_{j_1} - x_{i_1 j_1}, & j = j_1. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в проведении тех же операций применительно к невычеркнутым элементам матрицы  $C$ , незаполненным позициям матрицы  $X$  и величинам  $a_i^{(1)}$  и  $b_j^{(1)}$ .

Шаги предварительного этапа следуют до полного заполнения матрицы  $X$ . Согласно процессу образования матрицы  $X$  ее элементы удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.13)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8.14)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.15)$$

Положим

$$x_{i, n+1} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$x_{m+1, j} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^m x_{i, n+1} = \sum_{j=1}^n x_{m+1, j}.$$

Если  $\varepsilon = 0$ , то матрица  $X$ , очевидно, является планом задачи  $T_d$ . Легко проверить, что  $X$  обладает также свойством опорности. Однако в общем случае  $\varepsilon > 0$ , и для получения искомого опорного плана задачи  $T_d$

необходимо провести еще несколько итераций метода потенциалов.

Введем в рассмотрение расширенную задачу  $T_d(M)$ , которая образуется из  $T_d$  следующим образом. Присоединим к пунктам производства задачи  $T_d$  фиктивный пункт  $A_{m+1}$  с объемом производства  $a_{m+1} = \varepsilon$ , а к ее пунктам потребления — фиктивный пункт  $B_{n+1}$  с объемом потребления  $b_{n+1} = \varepsilon$ .

Пусть стоимость перевозки единичного груза между пунктами  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и  $B_{n+1}$ ,  $A_{m+1}$  и  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) равна  $M$ , а между пунктами  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  — нулю. Предположим также, что пропускные способности новых коммуникаций  $\overrightarrow{A_i B_{n+1}}$  ( $i=1, 2, \dots, m+1$ ),  $\overrightarrow{A_{m+1} B_j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) ничем не ограничены.

Из матрицы  $X$ , полученной в результате проведения предварительного этапа, легко образовать опорный план  $\bar{X}$  задачи  $T_d(M)$ . Для этого достаточно из каждого пункта  $A_i$  направить  $x_{i, n+1}$  единиц продукта в фиктивный пункт  $B_{n+1}$ , а из фиктивного пункта  $A_{m+1}$  направить  $x_{m+1, j}$  единиц продукта в пункт потребления  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Очевидно, перевозка  $x_{m+1, n+1}$  плана  $\bar{X}$  равна нулю.

Применим к задаче  $T_d(M)$  метод потенциалов, отправляясь от исходного плана  $\bar{X}$  и считая число  $M$  сколь угодно большим. Последнее условие, как обычно, означает, что число  $M$  предполагается большим любой фиксированной величины, с которой его приходится сравнивать в процессе решения задачи. Могут представиться следующие два случая.

1. После ряда итераций строится опорный план  $\bar{X}_1$  задачи  $T_d(M)$ , согласно которому перевозка между  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  равна  $\varepsilon$ .

2. В оптимальном плане задачи  $T_d(M)$ , который определяется за несколько итераций метода потенциалов, перевозка между пунктами  $A_{m+1}$  и  $B_{n+1}$  меньше  $\varepsilon$ .

В первом случае множество перевозок плана  $\bar{X}_1$  между пунктами  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) и  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) образует опорный план  $X_1$  задачи  $T_d$ ; во втором — задача  $T_d$  не имеет ни одного плана и, следовательно, неразрешима. Доказательства этих двух утверждений мы

приводить не будем. Таким образом, общая схема решения задачи  $T_d$  методом потенциалов состоит в следующем.

Вначале после нескольких шагов предварительного этапа определяется исходный опорный план задачи  $T_d(M)$ . Затем в результате нескольких итераций метода потенциалов либо строится достаточно экономный опорный план задачи  $T_d$ , либо устанавливается ее неразрешимость. Если исходный план задачи  $T_d$  определен, то для получения ее решения необходимо провести ряд итераций метода потенциалов. В гл. 5, п. 12.1 приводится еще один способ отыскания исходного плана задачи  $T_d$ .

Блок-схема алгоритма метода потенциалов для задач типа  $T_d$  изображена на рис. 4.2.

8.4. Для завершения описания метода потенциалов применительно к задаче  $T_d$  осталось освободиться от предположения о невырожденности задачи, на котором базировался вывод о конечности метода. В вырожденном случае среди базисных перевозок некоторых опорных планов имеются нулевые и равные  $d_{ij}$ . Поэтому отдельные итерации метода потенциалов сохраняют значение суммарных транспортных издержек ( $\theta=0$ ), что создает предпосылки для заикливания. Для предотвращения опасности заикливания необходимо, как и в случае задачи  $T$ , пользоваться особым правилом выбора перевозки, подлежащей удалению из числа базисных.

Формирование этого правила основано на переходе от данной задачи  $T_d$  к связанной с ней  $\varepsilon$ -задаче  $T_d(\varepsilon)$ . Задача  $T_d(\varepsilon)$  состоит в минимизации линейной формы задачи  $T_d$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (8.16)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.17)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8.18)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}. \quad (8.19)$$

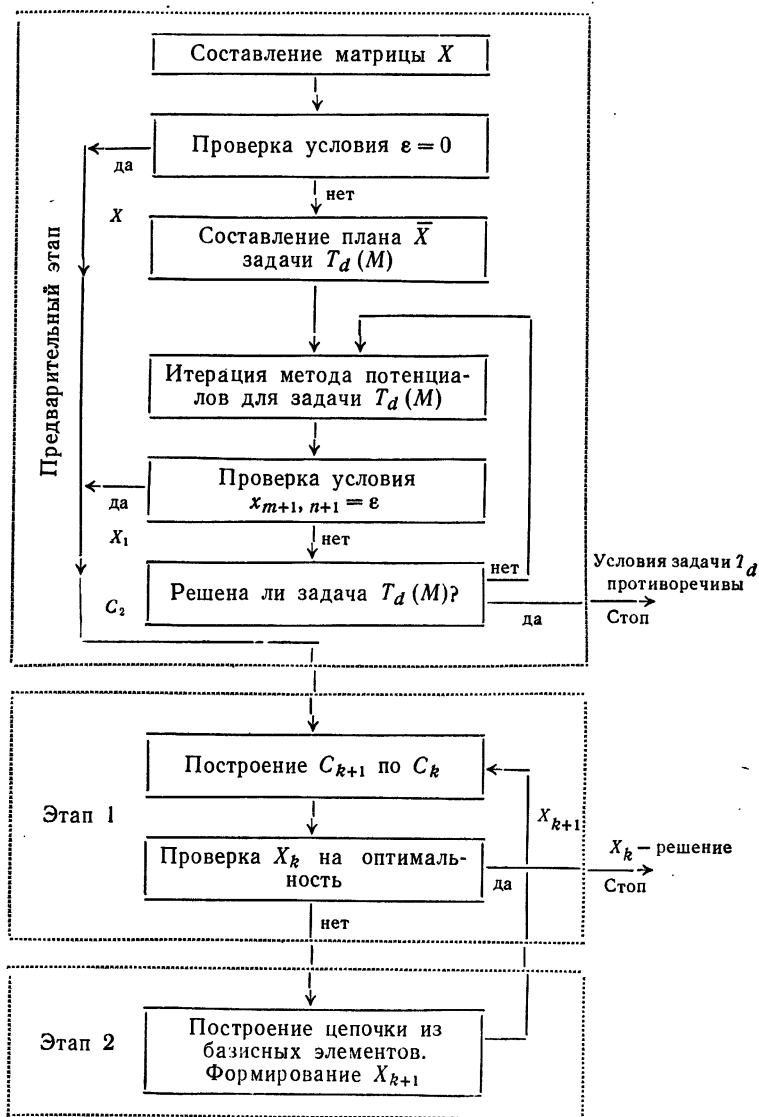


Рис. 4.2. Блок-схема алгоритма метода потенциалов для задачи типа  $T_d$ .

Здесь

$$a_i(\varepsilon) = a_i + n\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$b_j(\varepsilon) = \begin{cases} b_j + \varepsilon, & j = 1, 2, \dots, n-1, \\ b_n + (nm - n + 1)\varepsilon, & j = n. \end{cases}$$

Задача  $T_d(\varepsilon)$  отличается от породившей ее задачи  $T_d$  только правыми частями ограничений (8.17) — (8.18). Семейство задач,  $T_d(\varepsilon)$  обладает теми же свойствами, что и семейство, рассмотренное в п. 2.1. Приведем без доказательств формулировки соответствующих утверждений.

I. Существует такое число  $\delta > 0$ , что при любом  $\varepsilon$ , удовлетворяющем условию

$$0 < \varepsilon \leq \delta,$$

задача  $T_d(\varepsilon)$  является невырожденной.

II. Существует такое число  $\Delta > 0$ , что при любых  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < \varepsilon \leq \Delta,$$

$$0 \leq \varepsilon' \leq \Delta,$$

справедливы следующие утверждения:

а) если  $X(\varepsilon) = \|x_{ij}\| + \varepsilon\|\alpha_{ij}\|$  — опорный план задачи  $T_d(\varepsilon)$ , то  $X(\varepsilon') = \|x_{ij}\| + \varepsilon'\|\alpha_{ij}\|$  — опорный план задачи  $T_d(\varepsilon')$ ;

б) если  $X(\varepsilon)$  — опорное решение задачи  $T_d(\varepsilon)$ , то  $X(\varepsilon')$  — оптимальный опорный план задачи  $T_d(\varepsilon')$ .

Здесь под  $\|x_{ij}\|$  понимается матрица, составленная из коэффициентов разложения вектора

$$P = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

по базису плана  $X(\varepsilon)$  и небазисных перевозок плана  $X(\varepsilon)$ . Матрица  $\|\alpha_{ij}\|$  составляется из нулей и коэффициентов разложения вектора

$$Q = (\underbrace{n, n, \dots, n}_m, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1}, nm - n + 1)$$

по базису плана  $X(\varepsilon)$ .

Решение произвольной задачи  $T_d$  (возможно, и вырожденной) может быть осуществлено согласно следующей схеме. Перейдем от задачи  $T_d$  к соответствующему

семейству задач  $T_d(\epsilon)$ . Считая  $\epsilon$  сколь угодно малым числом, применим к задаче  $T_d(\epsilon)$  метод потенциалов. Поскольку задача  $T_d(\epsilon)$  обладает свойством невырожденности (утверждение I), то через конечное число итераций будет построено ее решение. Если далее в полученном оптимальном плане положить  $\epsilon=0$ , то придем к искомому решению задачи  $T_d$  (утверждение II).

При желании можно организовать тот же процесс решения, не переходя к семейству задач  $T_d(\epsilon)$ . Для этого следует перейти к обобщенным объемам производства и потребления, обобщенным перевозкам и обобщенным транспортным расходам подобно тому, как было сделано в п. 2.1 применительно к задаче  $T$ . Читатель, знакомый с содержанием п. 2.1, легко составит схему решения задачи  $T_d$ , основанную на переходе к соответствующей обобщенной задаче, и проведет необходимые обоснования.

Образование цикла в процессе решения задачи — явление хотя и возможное, однако крайне редкое. Поэтому при решении практических задач обычно используются более простые рекомендации для выбора перевозок, подлежащей переводу в число небазисных.

Одно из таких упрощенных правил состоит в следующем. Среди перевозок, на которых достигается число  $\theta$ , выбираются перевозки с минимальным первым индексом. Их может быть одна или две. В первом случае выбранная перевозка считается небазисной для нового плана; во втором небазисной считается та из выбранных перевозок, которая имеет наименьший второй индекс.

Указанное правило теоретически не исключает возможности зацикливания. Однако маловероятно, чтобы в практической задаче, решаемой с использованием этого правила, цикл мог образоваться.

## § 9. Пример

Приведем численный пример, иллюстрирующий описанный способ решения задачи  $T_d$ . Требуется решить задачу  $T_d$ , транспортные расходы и объемы производства

и потребления которой заданы таблицей

1	4	2	5	6
2	1	4	1	3
3	2	1	3	3
4	2	4	2	

а значения предельных пропускных способностей определяются матрицей

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

При исследовании данной задачи используются вспомогательные обозначения, введенные в § 5. Значения базисных перевозок каждого из планов для наглядности набраны жирным шрифтом. Процесс решения начинается с предварительного этапа.

3	0	2	0	6	3	3	3	3	3	1	1
0	1	0	2	3	3	2	2				
1	1	1	0	3	3	3	2	2	1	1	

4	2	4	2
1	2	4	2
1	1	4	2
1	1	3	2
1	1	3	
1	3		
1	1		
1			

$$C = \begin{vmatrix} 1^{(1)} & 4 & 2^{(6)} & 5 \\ 2 & 1^{(2)} & 4 & 1^{(4)} \\ 3^{(7)} & 2^{(5)} & 1^{(3)} & 3 \end{vmatrix}.$$

Цифры, стоящие в скобках над элементами матрицы  $C$ , обозначают номер шага, на котором выбирается соответствующий элемент матрицы  $X_0$  — результата предварительного этапа. Предварительный этап в данном случае содержит семь шагов. На первых трех шагах имеет место случай 3. На четвертом шаге мы сталкиваемся со всеми тремя случаями одновременно. Такая ситуация возможна только при условии вырож-

денности задачи  $T_d$ . Следующий шаг приводит к случаям 2 и 3. На последних двух шагах имеют место случаи 3 и 1 соответственно. Построенное множество перевозок  $X_0$  не является планом задачи  $T_d$ , так как  $\varepsilon = x_{15}^{(0)} = x_{43}^{(0)} = 1 > 0$ . Поэтому необходимо перейти к решению расширенной задачи  $T_d(M)$  с матрицей транспортных расходов

$$C(M) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & M \\ 2 & 1 & 4 & 1 & M \\ 3 & 2 & 1 & 3 & M \\ M & M & M & M & 0 \end{vmatrix}$$

и вектором производства — потребления

$$P = (6, 3, 3, 1; 4, 2, 4, 2, 1).$$

Исходный опорный план  $\bar{X}_0$  задачи  $T_d(M)$ , отвечающий матрице  $X_0$ , имеет вид

$$\bar{X}_0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В плане  $\bar{X}_0$  только три элемента удовлетворяют условию

$$0 < x_{ij} < d_{ij}.$$

Это

$$x_{31}^{(0)} = 1, \quad x_{43}^{(0)} = 1 \quad \text{и} \quad x_{15}^{(0)} = 1.$$

Поэтому в число базисных должно быть включено еще пять перевозок, равных 0 или  $d_{ij}$  (базисных перевозок должно быть  $n+m-1=8$ ). Выбор этих перевозок ограничен только одним условием: все восемь выделенных перевозок не должны допускать образования цикла. Выбранная система базисных перевозок опорного плана  $\bar{X}_0$  выделена жирным шрифтом.

Итерация I. Определим предварительные потенциалы задачи  $T_d(M)$ , отвечающие исходному плану  $\bar{X}_0$ . Как обычно, это осуществляется путем решения системы уравнений

$$\begin{aligned} v_4^{(0)} - u_1^{(0)} &= 5, & v_5^{(0)} - u_1^{(0)} &= M, \\ v_4^{(0)} - u_2^{(0)} &= 1, & v_5^{(0)} - u_4^{(0)} &= 0, \\ v_3^{(0)} - u_4^{(0)} &= M, & v_1^{(0)} - u_4^{(0)} &= M, \\ v_1^{(0)} - u_3^{(0)} &= 3, & v_2^{(0)} - u_3^{(0)} &= 2. \end{aligned}$$

Полагая  $u_1^{(0)} = 0$ , последовательно вычисляем

$$\begin{aligned} v_4^{(0)} &= 5, & v_5^{(0)} &= M, & u_2^{(0)} &= 4, & u_4^{(0)} &= M, \\ v_3^{(0)} &= 2M, & v_1^{(0)} &= 2M, & u_3^{(0)} &= 2M - 3, & v_2^{(0)} &= 2M - 1. \end{aligned}$$

Далее формируем матрицу  $C_1(M)$ , составленную из невязок между элементами матрицы  $C(M)$  и соответствующими разностями предварительных потенциалов:

$$C_1(M) = \begin{vmatrix} 1-2M & 5-2M & 2-2M & 0 & 0 \\ 6-2M & 6-2M & 8-2M & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2M-5 & 2M-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2M-5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Множество  $\Gamma_1^{(0)}$  состоит из элементов

$$\begin{aligned} c_{12}^{(1)} &= 5 - 2M, & c_{21}^{(1)} &= 6 - 2M, & c_{23}^{(1)} &= 8 - 2M, & c_{25}^{(1)} &= 4, \\ c_{34}^{(1)} &= 2M - 5, & c_{35}^{(1)} &= 2M - 3, & c_{42}^{(1)} &= 1, & c_{44}^{(1)} &= 2M - 5. \end{aligned}$$

Множество  $\Gamma_1^{(d)}$  включает элементы

$$c_{11}^{(1)} = 1 - 2M, \quad c_{13}^{(1)} = 2 - 2M, \quad c_{22}^{(1)} = 6 - 2M, \quad c_{33}^{(1)} = -2.$$

При достаточно больших значениях параметра  $M$  все элементы  $\Gamma_1^{(d)}$  отрицательны, однако среди элементов множества  $\Gamma_1^{(0)}$  отрицательными являются  $c_{12}^{(1)}$ ,  $c_{21}^{(1)}$ ,  $c_{23}^{(1)}$ . Следовательно, план  $\bar{X}_0$  не является оптимальным и его улучшение должно осуществляться за счет планирования перевозки по одной из коммуникаций:  $\overrightarrow{A_1B_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2B_1}$ ,  $\overrightarrow{A_2B_3}$ . Остановимся на коммуникации  $\overrightarrow{A_2B_3}$  и составим

цепочку из базисных перевозок плана  $\bar{X}_0$ , замыкающуюся на  $x_{23}^{(0)}$  (эта цепочка намечена в матрице  $\bar{X}_0$  стрелками). Нечетными элементами цепочки являются 2, 1, 1; их минимум  $\theta'_1 = 1$ . Уклонение четных элементов цепочки от соответствующих значений пропускных способностей коммуникаций  $-1, \infty$ , т. е.  $\theta''_1 = 1$ . Учитывая, что  $d_{23} = 1$ , находим величину перевозки по коммуникации  $\overrightarrow{A_2 B_3}$ :

$$\theta_1 = \min(\theta'_1, \theta''_1, d_{23}) = 1.$$

Переходим к новому плану

$$\bar{X}_1 = \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Как видим, согласно плану  $\bar{X}_1$  вдоль коммуникации  $\overrightarrow{A_4 B_5}$  перевозится  $\varepsilon = 1$  продукта. Поэтому перевозки плана  $\bar{X}_1$  между пунктами  $A_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и  $B_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) составляют опорный план задачи  $T_d$ , и последующие итерации относятся уже к этой задаче.

Итерация II. Исходный план  $X_1$  состоит из элементов матрицы  $\bar{X}_1$ , расположенных на пересечении первых трех строк и первых четырех столбцов:

$$X_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Только два элемента матрицы  $X_1$  ( $x_{31}^{(1)} = 1$  и  $x_{24}^{(1)} = 1$ ) удовлетворяют условию

$$0 < x_{ij}^{(1)} < d_{ij}.$$

Следовательно, остальные четыре базисные перевозки должны быть выбраны из числа  $x_{ij}^{(1)}$ , равных 0 или  $d_{ij}$  (ими являются  $x_{14}^{(1)} = x_{23}^{(1)} = x_{32}^{(1)} = x_{33}^{(1)} = 1$ ).

Далее составляем матрицу

$$C_2 = C - \|v_j^{(1)} - u_i^{(1)}\|,$$

где  $v_j^{(1)}$ ,  $u_i^{(1)}$  — предварительные потенциалы задачи  $T_d$ , отвечающие опорному плану  $X_1$ .

Опуская выкладки, аналогичные тем, которые проводились в итерации I, получаем

$$C_2 = \left\| \begin{array}{cccc} -9 & -5 & -6 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right\|.$$

Множество  $\Gamma_2^{(0)}$  состоит из элементов

$$c_{12}^{(2)} = -5, \quad c_{21}^{(2)} = -4, \quad c_{34}^{(2)} = 5;$$

множество  $\Gamma_2^{(d)}$  — из

$$c_{11}^{(2)} = -9, \quad c_{13}^{(2)} = -6, \quad c_{22}^{(2)} = -4.$$

План  $X_1$  не является оптимальным, и его улучшение должно производиться за счет увеличения перевозки либо по коммуникации  $\overrightarrow{A_1 B_2}$ , либо по коммуникации  $\overrightarrow{A_2 B_1}$ . Выбираем первую из них и составляем цепочку из базисных элементов  $X_1$ , замыкающуюся на  $x_{12}^{(1)}$ . Цепочка имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} x_{14}^{(1)} & x_{24}^{(1)} & x_{23}^{(1)} & x_{33}^{(1)} & x_{32}^{(1)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Следовательно,

$$\theta'_2 = 1, \quad \theta''_2 = \min(1, 0) = 0, \quad \theta = \min(1, 0, 1) = 0.$$

Новый план

$$X_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

отличается от  $X_1$  только тем, что в число базисных включена нулевая перевозка между пунктами  $A_1$  и  $B_2$  взамен перевозки  $x_{33}^{(1)} = x_{33}^{(2)} = d_{33}$ . Естественно, что суммарные транспортные расходы сохранили свое прежнее значение

$$L_1 = L_2 = 24.$$

Итерация III. Начинаем с преобразования матрицы  $C_2$  в матрицу  $C_3$ , отвечающую плану  $X_2$ :

$$c_2' = \begin{vmatrix} -9 & -5 & -6 & \bar{0} \\ -4 & -4 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \longrightarrow c_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

-5   -5

Операции, связанные с этим преобразованием, не нуждаются в пояснении, поскольку они были подробно описаны в § 4.

Составляем множества  $\Gamma_3^{(0)}$  и  $\Gamma_3^{(d)}$ :

$$\Gamma_3^{(0)} = \{c_{21}^{(3)} = 1, c_{34}^{(3)} = 0\},$$

$$\Gamma_3^{(d)} = \{c_{11}^{(3)} = -4, c_{13}^{(3)} = -6, c_{22}^{(3)} = 1, c_{33}^{(3)} = -5\},$$

которые указывают на единственную возможность улучшения плана  $X_2$  — необходимо уменьшить величину перевозки по коммуникации  $\overrightarrow{A_2 B_2}$ .

Для улучшения плана  $X_2$  составляем цепочку из его базисных элементов, замыкающуюся на элементе  $x_{22}^{(2)}$ :

$$\begin{matrix} x_{12}^{(2)} & x_{14}^{(2)} & x_{24}^{(2)} \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Затем вычисляем

$$\theta' = \min(1 - 0, 2 - 1) = 1, \theta'' = 1, \theta = \min(1, 1, 1) = 1.$$

Новый план  $X_3$  образуется из  $X_2$  путем сокращения на 1 величин перевозок вдоль коммуникаций  $\overrightarrow{A_2 B_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1 B_4}$  и

увеличения этих величин на 1 вдоль коммуникаций  $\overrightarrow{A_1B_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2B_4}$ :

$$X_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

В число базисных вводится перевозка  $x_{22}^{(3)}$ , а исключена из базиса должна быть одна из четырех перевозок:  $x_{22}^{(3)}$ ,  $x_{12}^{(3)}$ ,  $x_{14}^{(3)}$ ,  $x_{24}^{(3)}$ . Исключим из базиса перевозку  $x_{22}^{(3)}$ . Это позволит сохранить систему базисных перевозок и облегчит следующую итерацию.

Итак, перевозка  $x_{22}^{(3)}$  так и не вошла в базис, изменилось только ее значение: в старом плане эта перевозка была равна пропускной способности коммуникации  $\overrightarrow{A_2B_2}$ , в новом оказалась равной нулю.

Итерация IV. Поскольку системы базисных перевозок планов  $X_2$  и  $X_3$  совпадают, то

$$C_4 = C_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Изменяется только состав множеств  $\Gamma^{(0)}$  и  $\Gamma^{(d)}$ :

$$\Gamma_4^{(0)} = \{c_{21}^{(4)} = 1, c_{22}^{(4)} = 1, c_{34}^{(4)} = 0\},$$

$$\Gamma_4^{(d)} = \{c_{11}^{(4)} = -4, c_{13}^{(4)} = -6, c_{33}^{(4)} = -5\}.$$

Как мы видим, условия критерия оптимальности выполнены, т. е. план  $X_3$  является решением рассматриваемой задачи.

Итак, процесс решения данной задачи состоит из предварительного этапа и четырех итераций. На первой итерации, относящейся к задаче  $T_d(M)$ , строится исходный план задачи  $T_d$ . Остальные три итерации относятся к задаче  $T_d$ . Оптимальный план строится в результате второй и третьей итераций; последняя, четвертая, итерация служит для выяснения оптимальности полученного ранее плана.

Как уже отмечалось, метод потенциалов является конкретизацией метода последовательного улучшения плана применительно к транспортной задаче. В настоящей главе будет рассмотрен метод решения транспортной задачи, основанный на идеях метода сокращения невязок.

Общая схема метода такова.

Вначале строится план перевозок, не удовлетворяющий, вообще говоря, всем условиям задачи  $T$  (из некоторых пунктов производства не весь продукт вывозится, часть пунктов потребления не полностью удовлетворена). Далее осуществляется переход к другому плану перевозок, более близкому к плану задачи  $T$  (новый план связан с меньшим количеством невывезенного продукта по сравнению с предыдущим). Если построенный план перевозок удовлетворяет всем условиям транспортной задачи, т. е. является планом задачи  $T$ , то он автоматически оказывается ее решением. Если же некоторые условия рассматриваемой задачи остаются неудовлетворенными, метод дает возможность перейти к следующему плану перевозок, более близкому к плану задачи  $T$ . Через конечное число шагов метод приводит к плану перевозок, являющемуся планом задачи  $T$ . Как только это произойдет, процесс решения задачи заканчивается; так как построенный план перевозок совпадает с ее оптимальным планом.

Метод, схема которого была только что приведена, обычно называют венгерским. Интересно отметить, что идея этого метода была высказана венгерским математиком Эгервари (отсюда и название метода) задолго до возникновения теории линейного программирования (1931 г.). Длительное время работа Эгервари остава-

лась малоизвестной. Заслуга ее «открытия» принадлежит американскому математику Куну, который в 1953 г. перевел ее на английский язык. Кун развил идею Эггера и предложил метод, названный им венгерским, для решения задачи выбора (частный случай транспортной задачи) [23]. В дальнейшем венгерский метод был усовершенствован и перенесен на произвольную транспортную задачу [45, 42, 30].

Если говорить о связи венгерского метода с общими методами линейного программирования, то наиболее близко он примыкает к методам, опирающимся на теорию двойственности. По существу этот метод, как будет показано в § 7, является уточнением метода последовательного сокращения невязок применительно к транспортной задаче.

Венгерский метод особенно эффективен для задачи выбора. Поэтому §§ 1—3 посвящены частному случаю задачи  $T$  — задаче выбора.

В §§ 4—6 излагаются алгоритм, теория и пример применения венгерского метода к решению транспортной задачи. В § 7 устанавливается связь между венгерским методом решения транспортной задачи и методом последовательного сокращения невязок для задачи линейного программирования общего вида. § 8 посвящен общей характеристике венгерского метода решения задачи  $T$ . В §§ 9—12 излагаются вычислительная схема, теория и примеры применения венгерского метода для решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

## § 1. Венгерский метод для задачи выбора

1.1. В § 2 гл. 1 изложено содержание задачи выбора. Приведем ее математическую формулировку.

Требуется выбрать такую последовательность элементов  $\{c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{nj_n}\}$  из квадратной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

чтобы  $j_k \neq j_l$  при  $k \neq l$  и при этом величина  $\sum_{k=1}^n c_{kj_k}$  достигала своего максимального значения. Другими словами, необходимо из каждой строки и каждого столбца матрицы  $C$  выбрать ровно по одному элементу (всего  $n$  элементов) так, чтобы их сумма была наибольшей. Конечно, если бы матрица  $C$  была устроена так, что максимальные элементы ее строк лежали бы в различных столбцах, решение задачи выбора было бы тривиальным: оптимальный выбор в этом случае имеет вид  $\{c_{kj_k}\}$ , где

$$c_{kj_k} = \max_{1 \leq j \leq n} c_{kj}.$$

Однако обычно максимальные элементы нескольких строк расположены в одном и том же столбце, и решение проблемы выбора не носит столь очевидного характера. В общем случае приходится выбирать оптимальный вариант из достаточно большого числа возможных. Действительно, как легко усмотреть, число возможных вариантов в проблеме выбора с матрицей порядка  $n$  равно  $n!$ , причем просмотр каждого связан с  $n-1$  операциями сложения и одной операцией сравнения. Поэтому при больших значениях  $n$  неупорядоченный перебор возможных вариантов требует астрономического числа операций.

Применение венгерского метода существенно сокращает трудоемкость решения задачи выбора.

1.2. При описании венгерского метода будем придерживаться следующего порядка: вначале изложим алгоритм, затем приведем необходимые обоснования.

Начнем с определений. Нулевые элементы  $z_1, z_2, \dots, z_k$  квадратной матрицы  $D$  будем называть *независимыми нулями*, если для любого  $1 \leq i \leq k$  строка и столбец, на пересечении которых лежит элемент  $z_i$ , не содержат элементов  $z_k$  для всех  $k \neq i$ . Две прямоугольные матрицы  $C = \|c_{ij}\|_{m,n}$  и  $D = \|d_{ij}\|_{m,n}$  размеров  $m, n$  назовем *эквивалентными* ( $C \sim D$ ), если

$$c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Задачи выбора, определяемые эквивалентными матрицами, назовем *эквивалентными*. В процессе решения некоторые строки (столбцы) квадратной матрицы  $C$  и эквивалентных ей матриц будут выделяться значком «+», стоящим справа от соответствующей строки (над соответствующим столбцом). Элементы, лежащие в выделенных линиях (строках или столбцах) этих матриц, будем называть *выделенными элементами*.

Алгоритм состоит из подготовительного этапа и не более чем  $n - 2$  последовательно проводимых итераций. Каждая итерация связана с некоторыми эквивалентными преобразованиями матрицы, полученной в результате проведения предыдущей итерации, и выбором максимального числа независимых нулей. Окончательным результатом итерации является увеличение числа независимых нулей, имеющих в начале итерации, на единицу. Как только количество независимых нулей становится равным  $n$ , проблема выбора оказывается решенной: оптимальный вариант определяется позициями независимых нулей в последней из матриц, эквивалентных  $C$ .

Остановимся подробно на каждой составной части метода.

Подготовительный этап. Разыскиваем максимальный элемент в  $j$ -м столбце и все элементы этого столбца последовательно вычитаем из максимального (результат остается в соответствующей позиции). Эта операция производится со всеми столбцами матрицы  $C$  ( $1 \leq j \leq n$ ). В результате образуется матрица с неотрицательными элементами, в каждом столбце которой имеется по крайней мере один нуль. Рассматриваем  $i$ -ю строку полученной матрицы и из каждого ее элемента вычитаем минимум этой строки. Меняя  $i$  от 1 до  $n$ , получаем матрицу  $C_0$  с неотрицательными элементами, в каждой строке и каждом столбце которой имеется по меньшей мере один нуль. Отмечаем произвольный нуль в первом столбце звездой (\*). Затем просматриваем второй столбец и, если в нем есть нуль (в строке которого нет нуля со звездой), отмечаем его звездой. Аналогично просматриваются один за другим все остальные столбцы  $C_0$ . Очевидно, что нули матрицы  $C_0$ , отмеченные

звездой, по построению являются независимыми. На этом подготовительный план заканчивается.

Отдельная итерация. Допустим, что  $k$ -я итерация уже проведена и через  $C_k$  обозначена матрица, с которой мы подошли к началу  $(k+1)$ -й итерации. Если в матрице  $C_k$  звездой отмечено ровно  $n$  нулей, процесс решения заканчивается, причем оптимальный выбор определяется позициями нулей со звездой матрицы  $C_k$ . Если же число нулей со звездой матрицы  $C_k$  меньше  $n$ , переходим к  $(k+1)$ -й итерации, описание которой приводится ниже.

Перед началом итерации выделяем (значком  $+$ ) столбцы  $C_k$ , содержащие нули со звездой.

Этап 1. Если среди невыделенных элементов матрицы  $C_k$  нет нулевых, переходим к этапу 3. Если невыделенный нуль  $C_k$  обнаруживается, может представиться один из двух случаев:

а) строка, содержащая этот нуль, содержит также нуль со звездой;

б) упомянутая строка нуля со звездой не содержит.

В случае а) ставим над найденным нулем штрих ( $'$ ), выделяем строку, его содержащую (ставим справа от нее значок  $(+)$ ), и уничтожаем значок выделения  $(+)$  над столбцом, на пересечении которого с только что выделенной строкой расположен нуль со звездой.

В случае б) отмечаем полученный нуль штрихом и переходим к этапу 2.

Совокупность операций, связанных с описанным исследованием одного невыделенного нуля матрицы  $C_k$ , назовем шагом этапа 1. После конечного числа шагов либо обнаружится случай б) (переходим к этапу 2), либо все нули матрицы  $C_k$  окажутся выделенными (переходим к этапу 3). В первом случае будем говорить об исходе 1А этапа 1, во втором — об исходе 1В этого этапа.

Этап 2. Исходя из нуля со штрихом, в строке которого нет нуля со звездой (признак случая б)), строим следующую цепочку элементов матрицы  $C_k$ : исходный нуль со штрихом, нуль со звездой (если такой найдется), лежащий с ним в одном столбце, нуль со штрихом,

лежащий в одной строке с предшествующим нулем со звездой, и т. д. Итак, цепочка образуется движением от  $0'$  к  $0^*$  по столбцу, от  $0^*$  к  $0'$  по строке. Ниже будет показано, что описанный алгоритм построения цепочки однозначен и конечен. При этом цепочка обязательно заканчивается нулем со штрихом.

Над элементами цепочки, стоящими на нечетных местах (нули со штрихом), ставим звезды, уничтожая их над четными элементами. Далее уничтожаются все штрихи над элементами матрицы  $C_k$  и значки выделения ее линий (строк или столбцов). Число независимых нулей  $C_k$  увеличено на единицу;  $(k+1)$ -я итерация закончена.

Этап 3. К этому этапу переходят после завершения этапа 1 выделением всех нулей матрицы  $C_k$ . Среди невыделенных элементов  $C_k$  (ниже будет показано, что такие обязательно найдутся) выбираем минимальный:  $h > 0$ . Далее величину  $h$  вычитаем из всех элементов матрицы  $C_k$ , расположенных в ее невыделенных строках, и прибавляем ко всем элементам этой матрицы, лежащим в выделенных столбцах. Получаем новую матрицу  $C_k^{(1)}$  (эквивалентную  $C_k$ ). Поскольку среди невыделенных элементов  $C_k^{(1)}$  имеются нули, переходим к уже описанному этапу 1, с той разницей, что  $C_k$  заменяется матрицей  $C_k^{(1)}$ .

Завершив этап 1, мы либо переходим к этапу 2 (имеет место случай б)), либо возвращаемся к этапу 3 (все нули  $C$  оказываются выделенными). В первом случае после проведения этапа 2  $(k+1)$ -я итерация заканчивается. Во втором случае в результате этапа 3 приходим к матрице  $C_k^{(2)} \sim C_k^{(1)} \sim C_k$ , содержащей невыделенные нули, и вся последовательность операций повторяется, отправляясь от  $C_k^{(2)}$ . Ниже будет показано, что после конечного числа  $p-1$  возвращений к этапу 3 очередной этап 1 обязательно завершится исходом 1А (случаем б)). Проведя далее этап 2, мы увеличим число нулей со звездой на 1 и, следовательно, закончим  $(k+1)$ -ю итерацию. При этом  $C_{k+1} = C_k^{(p)}$ , где  $C_k^{(0)} = C_k$ . Блок-схема алгоритма помещена на рис. 5.1.

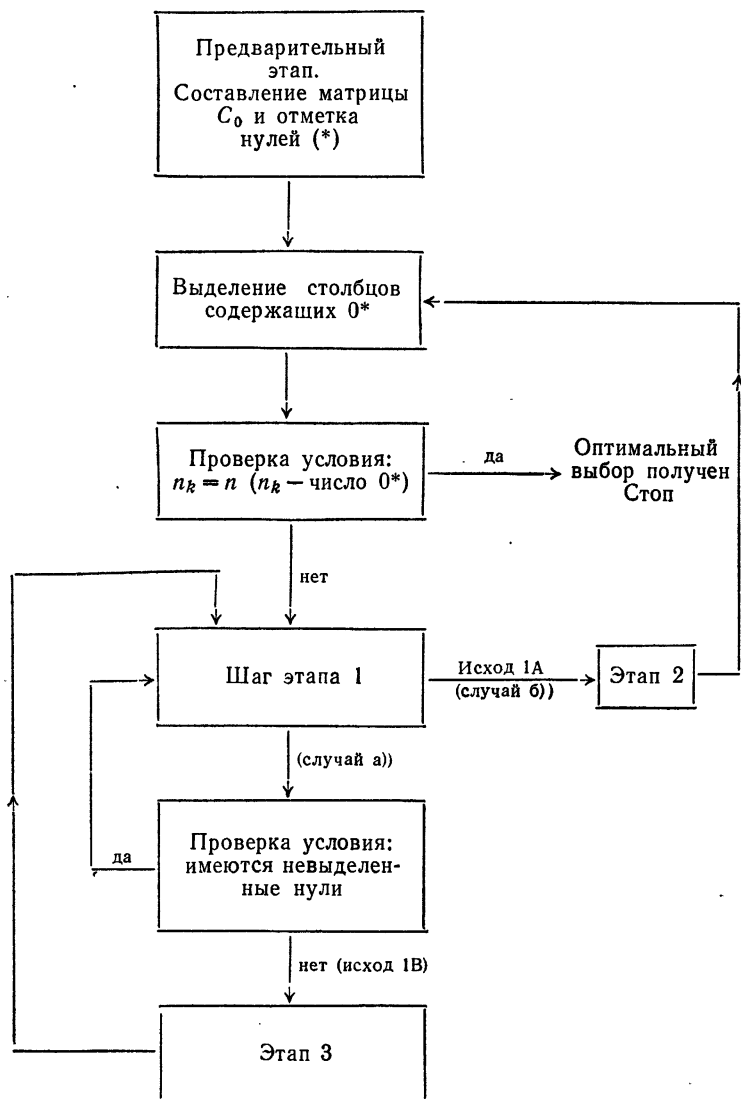


Рис. 5.1. Блок-схема алгоритма венгерского метода для задачи выбора.

## § 2. Обоснование алгоритма для задачи выбора

2.1. Рассмотрим две задачи выбора, одна из которых определяется матрицей  $C = \|c_{ij}\|_n$ , а другая — матрицей  $D = \|d_{ij}\|_n$ . Первую задачу назовем задачей  $V_1$ , вторую — задачей  $V_2$ .

Предположим, что матрицы  $C$  и  $D$  эквивалентны ( $C \sim D$ ), т. е.

$$\|c_{ij}\|_n = \|d_{ij} + \alpha_i + \beta_j\|_n.$$

Тогда, согласно определению,  $V_1$  и  $V_2$  — эквивалентные задачи выбора. Два выбора

$$(c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{nj_n}) \text{ и } (d_{1j_1}, d_{2j_2}, \dots, d_{nj_n}),$$

которые определяются одной и той же последовательностью позиций

$$(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n),$$

назовем *соответствующими*.

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^n c_{kj_k} = \sum_{k=1}^n d_{kj_k} + \sum_{k=1}^n \alpha_k + \sum_{k=1}^n \beta_{j_k} = \sum_{k=1}^n d_{kj_k} + \sum_{k=1}^n \alpha_k + \sum_{k=1}^n \beta_k.$$

Следовательно, суммы элементов любой пары соответствующих выборов двух эквивалентных задач  $V_1$  и  $V_2$  различаются на одну и ту же величину

$$\delta = \sum_{k=1}^n \alpha_k + \sum_{k=1}^n \beta_k.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что оптимальный выбор задачи  $V_1$  соответствует оптимальному выбору задачи  $V_2$ . Доказанное утверждение позволяет сводить решение задачи выбора  $V_1$  к отысканию оптимального выбора для эквивалентной задачи  $V_2$ .

В подготовительном этапе алгоритма строилась матрица  $C_0 \sim -C$ , все элементы которой были неотрицательными. Далее осуществлялся переход от матрицы  $C_0$  к матрице  $C_1$ , от  $C_1$  к  $C_2$  и т. д. до тех пор, пока при некотором  $l \leq n-2$  в матрице  $C_l$  не оказывалось ровно  $n$  независимых нулей ( $0^*$ ). Заметим, что, согласно

правилам перехода от  $C_k$  к  $C_{k+1}$ ,  $k=0, 1, \dots, l-1$ , все элементы матриц  $C_k$  остаются неотрицательными. Пусть  $n$  независимых нулей матрицы  $C_l \sim -C$  расположены в позициях:  $1j_1, 2j_2, \dots, nj_n$ . Тогда выбор

$$(-c_{1j_1}^{(l)}, -c_{2j_2}^{(l)}, \dots, -c_{nj_n}^{(l)})$$

является оптимальным для задачи с матрицей  $-C_l$ , так как

$$\sum_{k=1}^n (-c_{kj_k}^{(l)}) = \sum_{k=1}^n 0 = 0,$$

а любой другой выбор этой задачи имеет неположительное значение суммы элементов. Учитывая эквивалентность матриц  $-C_l$  и  $C$ , заключаем, что соответствующий выбор для исследуемой задачи является искомым решением.

Итак, матрица  $C_l$ , содержащая  $n$  нулей со звездой, полностью определяет оптимальный выбор; выбираются те элементы  $C$ , которые расположены в позициях нулей со звездой матрицы  $C_l$ .

**2.2.** Займемся теперь обоснованием отдельных этапов алгоритма.

Подготовительный этап, так же как и этап 1, дополнительных разъяснений не требуют.

Этап 2. Заметим прежде всего, что построение цепочки из  $0'$  (нулей со штрихом) и  $0^*$  (нулей со звездой) проводится однозначно, так как, согласно алгоритму, в каждой строке  $C_k$  содержится не более одного  $0'$  (после отметки нуля штрихом содержащая его строка выделяется), в каждом столбце  $C_k$  — не более одного  $0^*$  (все эти нули независимы). Покажем, что рассматриваемая цепочка не может содержать циклов и, следовательно, процесс построения ее конечен. Обозначим через

$$z_{i_1j_1}, z_{i_2j_1}, \dots, z_{i_sj_{s-1}}, z_{i_sj_s} \quad (2.1)$$

элементы цепочки, расположенные в порядке ее построения (нули со штрихом стоят на нечетных местах, нули со звездой — на четных). Рассмотрим два соседних нуля со штрихом:  $z_{i_tj_t}$  и  $z_{i_{t+1}j_{t+1}}$ . Очевидно, что в тот момент, когда  $z_{i_tj_t}$  отмечался штрихом,  $j_t$ -й столбец мат-

рицы  $C_k$  не был выделен. Но поскольку этот столбец содержит  $0^*(z_{i_{t+1}j_t})$ , первоначально он выделялся. Следовательно, значок «+» над ним был уничтожен до отметки  $z_{i_tj_t}$ . Согласно этапу 1 значок выделения над столбцом  $j_t$  уничтожается одновременно с выделением  $i_{t+1}$ -й строки ( $z_{i_{t+1}j_t}$  — нуль со звездой). Итак, отметка штрихом  $z_{i_{t+1}j_{t+1}}$ , совпадающая по времени с выделением  $i_{t+1}$ -й строки, была сделана раньше отметки штрихом элемента  $z_{i_tj_t}$ . Если теперь рассмотреть два произвольных нуля со штрихом  $z_{i_\lambda j_\lambda}$  и  $z_{i_\mu j_\mu}$ ,  $\lambda < \mu$ , содержащихся в цепочке (2.1), то из проведенных рассуждений с очевидностью следует, что  $z_{i_\mu j_\mu}$  был отмечен (штрихом) раньше, чем  $z_{i_\lambda j_\lambda}$ . Поэтому все нули со штрихом цепочки (2.1) различны.

Выписанная нами цепочка обрывается нулем со штрихом. Покажем, что это не случайно: оканчиваться нулем со звездой она не может. Допустим противное, т. е. существование цепочки вида

$$z_{i_1j_1}, \dots, z_{i_{t+1}j_t}, \quad (2.2)$$

которую невозможно дальше продолжить. Поскольку  $z_{i_tj_t}$  — нуль со штрихом,  $j_t$ -й столбец не выделен. С другой стороны, в этом столбце содержится нуль со звездой ( $z_{i_{t+1}j_t}$ ). Следовательно, значок выделения над ним был уничтожен, что указывает на наличие в  $i_{t+1}$ -й строке нуля со штрихом. Значит, цепочка (2.2) может быть продолжена вопреки нашему допущению.

Теперь легко установить различие всех элементов цепочки (2.1). Относительно нулей со штрихом утверждение было доказано ранее. Что касается нулей со звездой, то предположение о совпадении двух таких нулей приводит к выводу о совпадении двух следующих за ними нулей со штрихом (по доказанному после каждого  $0^*$  в (2.1) обязательно следует  $0'$ ), что невозможно. Таким образом, цепочка (2.1) состоит не более чем из  $2m_k + 1$  элементов, где  $m_k$  — число  $0^*$  в матрице  $C_k$ , и оканчивается всегда нулем со штрихом.

Отметим звездой нечетные элементы последовательности (2.1), уничтожив предварительно стоящие над

ними штрихи, и сотрем звезды над ее четными элементами. Очевидно, что число  $0^*$  при этом увеличится на единицу. Покажем, что вновь полученная совокупность  $0^*$  состоит из независимых нулей. В образованном множестве нулей со звездой будем различать «старые» и «новые» нули. Если  $z_{ij}$  — «старый» нуль, то он не входит в последовательность (2.1), откуда следует отсутствие в  $i$ -й строке и в  $j$ -м столбце «новых» нулей. Что касается других «старых» нулей, то  $i$ -я строка и  $j$ -й столбец их не содержат в силу независимости предыдущего множества нулей со звездой. Рассмотрим произвольный «новый» нуль:  $z_{i_\lambda j_\lambda}$ . Заметим вначале, что в его строке и столбце нет других «новых» нулей. Действительно, если бы в  $i_\lambda$ -й строке содержалось два «новых» нуля, она обладала бы двумя нулями со штрихом, чего быть не может. С другой стороны, предположение о наличии в  $j_\lambda$ -м столбце двух «новых» нулей:  $z_{i_\lambda j_\lambda}$ ,  $z_{i_\mu j_\mu}$  — приводит к выводу о совпадении двух элементов цепочки (2.1):  $z_{i_{\lambda+1} j_\lambda}$  и  $z_{i_{\mu+1} j_\mu}$ , что противоречит ее структуре.

Что касается «старых» нулей, то их отсутствие в строке и столбце, содержащих  $z_{i_\lambda j_\lambda}$ , уже установлено. Итак, этап 2 приводит к увеличению числа независимых нулей на единицу.

Этап 3. Пусть все нули матрицы  $C_k$  оказались выделенными. Обозначим число нулей со звездой матрицы  $C_k$  через  $m_k$  (очевидно, что  $m_k < n$ , так как в противном случае задача была бы решена на предыдущей итерации). Заметим, что суммарное число строк и столбцов матрицы  $C_k$ , выделенных согласно алгоритму, совпадает с  $m_k$  (см. этап 1). Если через  $m'_k$  обозначить число выделенных строк, а через  $m''_k$  — число выделенных столбцов, то количество  $p$  невыделенных элементов матрицы  $C_k$  определяется формулой

$$p = n(n - m_k) + m'_k m''_k \geq n(n - m_k) \geq n.$$

Поэтому имеется некоторое непустое множество невыделенных элементов. Пусть  $I'_k(I''_k)$  обозначает совокупность индексов невыделенных строк (столбцов) мат-

рицы  $C_k$ . В соответствии с алгоритмом на третьем этапе осуществляется переход от матрицы  $C_k$  к матрице  $C'_k$ , определяемой следующими соотношениями:

$$c_{ij}^{(k, 1)} = \begin{cases} c_{ij}^{(k)} - h, & i \in I'_k, \quad j \in I''_k, \\ c_{ij}^{(k)} + h, & i \notin I'_k, \quad j \notin I''_k, \\ c_{ij}^{(k)}, & i \in I'_k, \quad j \notin I''_k \end{cases} \quad (2.3)$$

или

$$i \notin I'_k, \quad j \in I''_k.$$

Здесь через  $h$  обозначен

$$\min c_{ij}^{(k)},$$

$$i \in I'_k$$

$$j \in I''_k$$

Вспомним, что, согласно алгоритму (этап 1), все отмеченные нули (звездой или штрихом) матрицы  $C_k$  расположены либо в выделенной строке, либо в выделенном столбце (ни один из них не лежит на пересечении выделенной строки и выделенного столбца). Поэтому, согласно (2.3), все отмеченные нули матрицы  $C_k$  переходят в нули матрицы  $C'_k$  (звезды и штрихи при этом сохраняются). Все элементы  $C'_k$  остаются неотрицательными, поскольку на  $h$  уменьшаются лишь невыделенные элементы  $C_k$ , а  $h$  по определению является минимальным из них. Кроме того, среди невыделенных элементов  $C'_k$  по меньшей мере один равен нулю. Продолжая процесс вычисления, мы либо переходим к этапу 2 и увеличиваем число независимых нулей на единицу, либо, выделив все нулевые элементы  $C'_k$ , возвращаемся снова к этапу 3. При этом, хотя общее число выделенных линий  $C'_k$  остается равным  $m_k$ , число выделенных строк увеличивается по крайней мере на единицу (вновь образованные нули  $C'_k$ , согласно алгоритму, должны быть расположены в выделенных строках, старые же выделенные

строки остаются без изменения). Проведя еще раз этап 3, переходим к матрице  $C_k^{(2)} \sim C_k^{(1)} \sim C_k$  и либо увеличиваем число независимых нулей на единицу, либо выделяем все нули матрицы  $C_k^{(2)}$ , увеличив при этом число выделенных строк за счет уменьшения числа выделенных столбцов. Последовательный переход от  $C_k$  к  $C_k^{(1)}$ , от  $C_k^{(1)}$  к  $C_k^{(2)}$  и т. д. осуществляется до тех пор, пока для некоторой матрицы  $C_k^{(p)}$  после этапа 1 последует этап 2. Покажем, что

$$p \leq m_k + 1. \quad (2.4)$$

Действительно, при переходе от  $C_k^{(\mu)}$  к  $C_k^{(\mu+1)}$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, p-1$ , число выделенных строк увеличивается не менее чем на единицу. Поэтому, если после  $m_k$  циклов (этап 3+этап 1) не последовало этапа 2, все нули  $C_k^{(m_k)}$  расположены в выделенных строках этой матрицы. Поскольку в любой строке, содержащей «новый» нуль матрицы  $C_k^{(m_k+1)}$ , нет нулей со звездой (все  $0^*$  расположены в выделенных строках), мы сразу же переходим к этапу 2. Неравенство (2.4) доказано.

Этим завершается обоснование алгоритма.

### § 3. Пример

**3.1.** Для иллюстрации алгоритма решения задачи выбора приведем численный пример.

Требуется решить задачу выбора, определяемую матрицей

$$C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

При использовании алгоритма переход от одной матрицы к другой (после 2-го или 3-го этапа) отмечается стрелкой, под которой помещается соответствующая величина  $h$  (в случае этапа 3). Значок выделения, подле-

жащий уничтожению, обводится кружком. Цепочка в этапе 2 намечается стрелками.

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{подготовительный этап}} C_0 = \begin{vmatrix} \oplus & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0' & 0 & 1 & 0 \\ 0' & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \text{этапы 1, 2} \\
 &\quad \text{Итерация I} \\
 \rightarrow C_0 &= \begin{vmatrix} + & \oplus & + \\ 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0 & 0^* & 0' & 1 & 0 \\ 0^* & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3' & 2 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[h=1]{\text{этап 3}} C_1 = \begin{vmatrix} + & & & \oplus & \\ 1 & 0' & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 0' & 2 & 0 \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0' & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \text{этап 1} \qquad \qquad \qquad \text{этапы 1, 2} \\
 &\quad \text{Итерация II} \\
 \rightarrow C_1 &= \begin{vmatrix} + & \oplus & \oplus & \oplus \\ 1 & 0 & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 0' & 2 & 0' \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0^* & 0' & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0' & 1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \text{этапы 1, 2} \\
 &\quad \text{Итерация III} \\
 \rightarrow C_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0^* \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0^* & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0^* & 1 \end{vmatrix} .
 \end{aligned}$$

Отсюда оптимальный выбор имеет вид

$$(a_{12}, a_{25}, a_{31}, a_{43}, a_{54}).$$

Соответствующая ему сумма

$$a_{12} + a_{25} + a_{31} + a_{43} + a_{54} = 15.$$

**3.2.** Сделаем пояснения к решению примера. Процесс отыскания максимального выбора складывается из подготовительного этапа и трех итераций.

Подготовительный этап. Максимальный элемент первого столбца матрицы  $C$  равен 4. Поэтому для получения первого столбца матрицы  $C'$  необходимо из 4 вычесть последовательно элементы первого столбца матрицы  $C$  и поместить полученные результаты в соответствующие позиции первого столбца искомой матрицы. Аналогично для образования столбцов 2, 3, 4 и 5 матрицы  $C'$  необходимо элементы соответствующих столбцов матрицы  $C$  вычесть из величин 5, 3, 2, 3. Поскольку в каждой строке матрицы  $C'$  имеются нулевые элементы,  $C' = C'' = C_0$ . В первом столбце  $C_0$  отмечается звездой нуль, расположенный во второй строке. Во втором столбце матрицы  $C_0$  единственный нуль лежит во второй строке и, следовательно, звездой не отмечается. Подобная ситуация имеет место и для столбцов 3, 5. В столбце 4 отмечаем звездой нуль, расположенный в первой строке (в первой строке матрицы  $C_0$  нет нулей со звездой). В результате предварительного этапа получено два независимых нуля. Следовательно, для решения задачи необходимо проведение трех итераций.

Итерация I. Этап 1. Выделяем (значком «+») столбцы матрицы  $C_0$ , содержащие нули со звездой (первый и четвертый). Переходим к просмотру невыделенных нулей  $C_0$ , начиная со второго столбца. Отмечаем штрихом нуль этого столбца, лежащий во второй строке. Поскольку в этой строке имеется  $0^*$  (альтернатива а)), строка подлежит выделению. Одновременно уничтожается (обводится кружком) значок выделения над первым столбцом, содержащим  $0^*$  во второй строке. Обращаемся к невыделенным нулям первого столбца. Отмечаем штрихом нуль этого столбца, лежащий в третьей строке. Третья строка матрицы  $C_0$  не содержит  $0^*$ . Следовательно, имеет место альтернатива б), указывающая на необходимость перехода к этапу 2. Этап 1, таким образом, состоит из двух шагов.

Этап 2. От последнего нуля со штрихом (третья строка, первый столбец) движемся по столбцу до нуля со звездой (первый столбец, вторая строка). Затем от  $0^*$ , лежащего на пересечении второй строки и первого столбца, переходим к  $0'$ , расположенному в той же строке второго столбца. Поскольку во втором столбце мат-

рицы  $C_0$  нет  $0^*$ , процесс образования цепочки закончен. Искомая цепочка состоит из трех элементов:  $0'_{31}$ ,  $0^*_{21}$ ,  $0'_{22}$  (индексы при нулях указывают на их положение в матрице  $C$ ). Для завершения этапа 2, а вместе с ним и итерации I остается поставить звезды над нулями цепочки, отмеченными штрихами, уничтожить звезду над единственным четным элементом цепочки и стереть все значки выделения. В результате итерации I число независимых нулей, увеличившись на 1, стало равным 3.

Итерация II. Этап 1. Выделяем столбцы, содержащие нули со звездой (они имеют номера 1, 2, 4). Просмотр нуля, расположенного во второй строке первого из невыделенных столбцов, приводит к выделению этой строки и уничтожению значка  $+$  над столбцом 2 (альтернатива а)). После этого все нулевые элементы матрицы  $C_0$  оказываются выделенными, и этап 1 завершается переходом к этапу 3.

Этап 3. Минимальным из числа невыделенных элементов матрицы  $C_0$  является единица. Поэтому из элементов 1, 3, 4 и 5 строк матрицы  $C_0$  вычитается  $h=1$ ; к элементам столбцов  $C_0$  с номерами 1, 4 величина  $h=1$  прибавляется. В результате получаем матрицу  $C_1 \sim C_0$ . Этап 3 закончен. Переносим все значки  $(+, *, ')$  с матрицы  $C_0$  на матрицу  $C_1$  и переходим к этапу 1 (естественно, что значки выделения, обведенные кружком, переносить не имеет смысла).

Этап 1. Отмечаем штрихом единственный невыделенный нуль второго столбца  $C_1$ , выделяем при этом первую строку и снимаем знак выделения над четвертым столбцом. Затем обращаемся к третьему столбцу и отмечаем штрихом его единственный невыделенный нуль. Поскольку в строке, содержащей этот нуль, нет нулей со звездой (альтернатива б)), необходим переход к этапу 2.

Этап 2, завершающий итерацию II, чрезвычайно прост, так как соответствующая цепочка состоит всего лишь из одного элемента  $0'_{43}$ .

Итерация III, в результате которой мы приходим к искомому решению, составляется из этапов 1, 2. Подробного описания этой итерации мы приводить не будем.

## § 4. Венгерский метод для транспортной задачи

4.1. Задача выбора, сформулированная в предыдущем параграфе как типичная комбинаторная проблема, легко приводится к транспортной задаче с единичными объемами производства и потребления.

Сопоставим каждой последовательности элементов матрицы  $C$  вида

$$(c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{nj_n}),$$

где  $j_k \neq j_l$  при  $k \neq l$ , квадратную матрицу  $X = \|x_{ij}\|_n$ , элементы которой определяются соотношением

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq j_i, \\ 1, & j = j_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть  $H$  — множество всевозможных матриц вида (4.1), в каждой строке и в каждом столбце которых содержится ровно одна единица, а остальные элементы — нули.

Очевидно, задача выбора сводится к отысканию матрицы  $X^* \in H$ , которая придает линейной форме

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4.2)$$

возможно меньшее значение.

Рассмотрим выпуклый многогранник  $M$ , определяемый условиями

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Из определения множества  $H$  следует, что любая его точка содержится в  $M$ . Поскольку из положительных элементов матрицы  $X \in H$  невозможно составить цикл, любая точка множества  $H$  является вершиной многогранника  $M$ . С другой стороны, как было показано в п. 5.1 гл. 3, все составляющие вершин многогранника  $M$  — целые числа. Учитывая далее условия (4.3) и (4.4), приходим к выводу, что любая вершина многогранника

$M$  является матрицей, в каждой строке и каждом столбце которой имеется одна единица, а остальные элементы — нули. Другими словами, каждая вершина  $M$  содержится в множестве  $H$ .

Таким образом, множество  $H$  является полным множеством вершин многогранника  $M$ .

Перейдем от задачи минимизации линейной формы (4.2) на множестве  $H$  к транспортной задаче, состоящей в минимизации этой же формы на многограннике  $M$ . Как известно, минимум линейной формы на произвольном выпуклом многограннике достигается в одной из его вершин. Следовательно, найдется точка  $X^* \in H$ , являющаяся решением задачи (4.2) — (4.4). Поскольку множество  $H$  содержится в многограннике  $M$ , матрица  $X^*$  определяет также и решение задачи выбора.

Итак, задача выбора эквивалентна отысканию опорного решения транспортной задачи (4.2) — (4.4). Как видим, приведение комбинаторной задачи к задаче линейного программирования свелось к построению эквивалентного выпуклого многогранника, множество вершин которого совпадает с множеством возможных выборов задачи. Для задачи выбора построение такого многогранника — дело простое. К сожалению, этого нельзя сказать о других комбинаторных задачах.

Обычно выписать условия эквивалентного многогранника в замкнутом виде не удастся. Задача выбора — счастливое исключение из общего правила, что и дало возможность разработать для ее анализа столь эффективный алгоритм, каким является венгерский метод.

4.2. Рассуждения предыдущего пункта показывают, что алгоритм, описанный в § 1, может рассматриваться как метод решения транспортной задачи специального вида (с единичными объемами производства и потребления). Этим объясняется возможность распространения венгерского метода на случай общей транспортной задачи, чему и посвящен настоящий параграф.

Итак, пусть требуется решить задачу  $T$ , состоящую в минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4.5)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Алгоритм решения задачи  $T$ , основанный на венгерском методе, состоит из предварительного этапа и конечного числа итераций. В результате предварительного этапа строится матрица  $X_0 = \|x_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$ , элементы которой неотрицательны и удовлетворяют неравенствам.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(0)} &\leq a_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(0)} &\leq b_j, & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Если все условия (4.9) суть равенства, матрица  $X_0$  автоматически является решением задачи  $T$ . Если же среди этих условий имеются строгие неравенства, т. е.  $X_0$  не является планом задачи  $T$ , переходим к итерации I.

Обозначим через  $X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|_{m,n}$  матрицу, построением которой заканчивается  $k$ -я итерация (подготовительному этапу приписываем индекс 0). Положим

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}. \quad (4.10)$$

Величина  $\Delta_k$ , характеризующая близость матрицы  $X_k$  к плану задачи  $T$ , называется *суммарной невязкой* матрицы  $X_k$ . В результате итерации I строится матрица  $X_1 = \|x_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$ , состоящая из неотрицательных элементов, подчиненных системе неравенств (4.9). При этом матрица  $X_1$  такова, что  $\Delta_1 < \Delta_0$ . Если  $\Delta_1$  оказывается равным нулю,  $X_1$  — оптимальный план задачи  $T$ . Если же  $\Delta_1 > 0$ , необходимо приступить к следующей итерации. Итерации проводятся до тех пор, пока  $\Delta_d$  при некото-

ром  $d$  окажется равным нулю. В этом случае матрица  $X_d$  является решением транспортной задачи.

4.3. Перейдем к детальному рассмотрению отдельных элементов алгоритма.

Подготовительный этап. В каждом из столбцов матрицы транспортных издержек  $C = \|c_{ij}\|_{m,n}$  отыскиваем минимальный элемент, который затем вычитаем из всех элементов этого столбца. Получаем матрицу  $C'$ . Далее в каждой строке  $C'$  выбираем минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов рассматриваемой строки. Приходим к матрице  $C'' = C_0 = \|c_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$ , все элементы которой неотрицательны, причем в каждой строке (каждом столбце) этой матрицы имеется по крайней мере один нуль. Затем определяем матрицу  $X_0 = \|x_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$ , построение которой осуществляется по столбцам. Пусть  $i_{k,j}$  ( $k=1, 2, \dots, r_j$ ) — номер строки, в которой расположен  $k$ -й нуль  $j$ -го столбца матрицы  $C_0$  (отсчет нулей производится сверху вниз). Тогда элементы первого столбца  $X_0$  определяются рекуррентной формулой

$$x_{i1}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq i_{\lambda,1}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, r_1, \\ \min \left\{ a_i, b_1 - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu 1}^{(0)} \right\}, & i = i_{\lambda,1}. \end{cases}$$

Допустим, что столбцы  $X_0$  до  $(j-1)$ -го включительно уже заполнены. Элементы  $j$ -го столбца определяются в соответствии с формулой

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq i_{\lambda,j}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, r_j, \\ \min \left\{ a_i - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{i\mu}^{(0)}, b_j - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu j}^{(0)} \right\}, & i = i_{\lambda,j}. \end{cases}$$

Таким образом, положительные элементы матрицы  $X_0$  расположены в позициях нулей матрицы  $C_0$ . Если

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(0)} = 0,$$

$X_0$  — решение задачи  $T$  (см. обоснование в п. 5.1). Если же  $\Delta_0 > 0$ , переходим к первой итерации.

Каждая итерация алгоритма состоит, вообще говоря, из трех качественно различных этапов. Начинается итерация этапом 1. Затем в общем случае несколько раз проводится пара этапов: 3, 1 (может случиться, что итерация не содержит ни одной такой пары). Заканчивается итерация этапом 2.

Допустим, что уже проведено  $k$  итераций, причем  $\Delta_k > 0$ . В таком случае необходимо, отправляясь от матриц  $X_k$ ,  $C_k$ , полученных в результате  $k$ -й итерации, провести следующую,  $(k+1)$ -ю, итерацию. Перед началом итерации выделяются (значком «+») те столбцы матрицы  $C_k$ , для которых значение невязки

$$\delta_j^{(k)} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} = 0.$$

Этап 1. Если все нулевые элементы  $C_k$  оказываются выделенными, переходим к этапу 3. В противном случае выбираем произвольный невыделенный нуль матрицы  $C_k$ , расположенный, скажем, в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, и вычисляем величину невязки  $i$ -й строки

$$\delta_i^{(k)} = a_i - \sum_{\mu=1}^n x_{i\mu}^{(k)}.$$

Возможен один из двух случаев:

$$\text{а) } \delta_i^{(k)} = 0; \quad \text{б) } \delta_i^{(k)} > 0.$$

В случае а)  $i$ -я строка матрицы  $C_k$  выделяется (значком «+», стоящим справа от нее), элемент  $c_{ij}^{(k)}$  отмечается штрихом. Далее просматриваются все выделенные столбцы матрицы  $C_k$ . Если  $\mu$ -й столбец  $C_k$  выделен и  $x_{i\mu}^{(k)} > 0$ , значок выделения над этим столбцом уничтожается, а элемент  $c_{i\mu}^{(k)}$  отмечается звездой. В случае б) элемент  $c_{i\mu}^{(k)}$  отмечается штрихом, после чего осуществляется переход к этапу 2. Назовем совокупность операций, связанных с просмотром одного невыделенного нуля матрицы  $C_k$ , шагом этапа 1. Допустим, что уже проделано несколько подобных шагов, причем последний шаг завершился случаем а). Если все нули матрицы  $C_k$  оказываются выделенными, переходим к этапу 3. Если же среди нулей  $C_k$  имеются невыделенные, продолжаем

этап 1, переходя к следующему его шагу. Итак, этап 1 складывается из нескольких шагов и завершается либо обнаружением на некотором из них случая б) (переход к этапу 2), либо выделением всех нулей матрицы  $C_k$  (переход к этапу 3).

В зависимости от исхода этапа 1 будем различать случаи 1А (переход к этапу 2) и 1В (переход к этапу 3).

**4.4. Этап 2** следует за первым этапом в случае 1А и состоит в построении цепочки из нулей матрицы  $C_k$ , отмеченных штрихами или звездами, с последующим переходом к новой матрице  $X_{k+1}$ . Пусть для некоторого невыделенного нуля матрицы  $C_k$ , расположенного, скажем, в позиции  $\lambda_1, \mu_1$ , имеет место случай б). Исходя из этого элемента, строим цепочку из отмеченных нулей матрицы  $C_k$ , руководствуясь следующим правилом. В  $\mu_1$ -м столбце  $C_k$  выбираем нуль со звездой —  $0_{\lambda_2\mu_1}^*$  (индексы при нуле указывают на его положение в матрице  $C_k$ ). В  $\lambda_2$ -й строке выбираем нуль со штрихом —  $0'_{\lambda_2\mu_2}$ . Далее от  $0'_{\lambda_2\mu_2}$  движемся по  $\mu_2$ -му столбцу до нуля со звездой и т. д. Последовательный переход от нуля со штрихом к нулю со звездой по столбцу, от нуля со звездой к нулю со штрихом по строке осуществляется до тех пор, пока это возможно. Доказывается (см. обоснование алгоритма в п. 5.1), что построение цепочки согласно указанному правилу проводится однозначно, цепочка не имеет замкнутых циклов (все ее элементы различны) и всегда оканчивается нулем со штрихом.

После того как цепочка

$$0'_{\lambda_1\mu_1}, 0_{\lambda_2\mu_1}^*, \dots, 0_{\lambda_s\mu_{s-1}}^*, 0'_{\lambda_s\mu_s}, \quad (4.11)$$

составленная из отмеченных нулей матрицы  $C_k$ , построена, переход от матрицы  $X_k$  к матрице  $X_{k+1}$  осуществляется согласно формуле

$$x_{ij}^{(k+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} x_{ij}^{(k)}, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ не входит в цепочку} \\ & (4.11), \\ x_{ij}^{(k)} + \theta_k, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ — нечетный элемент} \\ & \text{цепочки (4.11),} \\ x_{ij}^{(k)} - \theta_k, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ — четный элемент} \\ & \text{цепочки (4.11).} \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

Здесь через  $\theta_k$  обозначен

$$\min_{2 \leq t \leq s} \{x_{\lambda_t \mu_{t-1}}^{(k)}, \delta_{\lambda_1}^{(k)}, \bar{\delta}_{\mu_s}^{(k)}\},$$

где, как уже отмечалось,

$$\delta_i^{(k)} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}, \quad \bar{\delta}_j^{(k)} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно заметить (см. обоснование в п. 5.1), что элементы матрицы  $X_{k+1}$  неотрицательны и удовлетворяют неравенствам (4.9). При этом  $\Delta_{k+1} < \Delta_k$ .

Этап 3. Допустим, что этап 1 завершился случаем 1В (все нули  $C_k$  выделены). Тогда необходимо проведение этапа 3, состоящего в переходе от матрицы  $C_k = \|c_{ij}^{(k)}\|$  к матрице  $C_k^{(1)} = \|c_{ij}^{(k, 1)}\| \sim C_k$ , в которой имеется по крайней мере один невыделенный нуль, причем все  $c_{ij}^{(k, 1)} \geq 0$ . Пусть  $h = \min c_{ij}^{(k)}$ , где минимум берется по всем невыделенным элементам матрицы  $C_k$ . Из элементов матрицы  $C_k$ , принадлежащих невыделенным строкам, вычитаем  $h$ , а к элементам, принадлежащим выделенным столбцам, прибавляем  $h$ . Полученную матрицу обозначаем через  $C_k^{(1)}$ . Далее переходим к этапу 1, заменив  $C_k$  матрицей  $C_k^{(1)}$  и сохранив при этом все старые значки выделения.

После проведения этапа 1 мы либо перейдем к этапу 2 (случай 1А), либо вынуждены будем снова вернуться к этапу 3 (случай 1В).

Циклы, каждый из которых составлен из этапов 3, 1, необходимо проводить до тех пор, пока один из этапов 1 не завершится переходом к этапу 2 (случай 1А). В дальнейшем (см. обоснование в п. 5.1) будет показано, что через конечное число  $p$  циклов это обязательно случится, и следовательно, после проведения 2-го этапа  $(k+1)$ -я итерация закончится.

Если суммарная невязка  $\Delta_{k+1}$  окажется равной нулю,  $X_{k+1}$  — искомое решение задачи  $T$ . Если же  $\Delta_{k+1} > 0$ , переходим к следующей,  $(k+2)$ -й итерации, отправляясь от матриц  $C_{k+1} = C_k^{(p)}$  и  $X_{k+1}$ . На рис. 5.2 изображена блок-схема алгоритма решения задачи  $T$ .

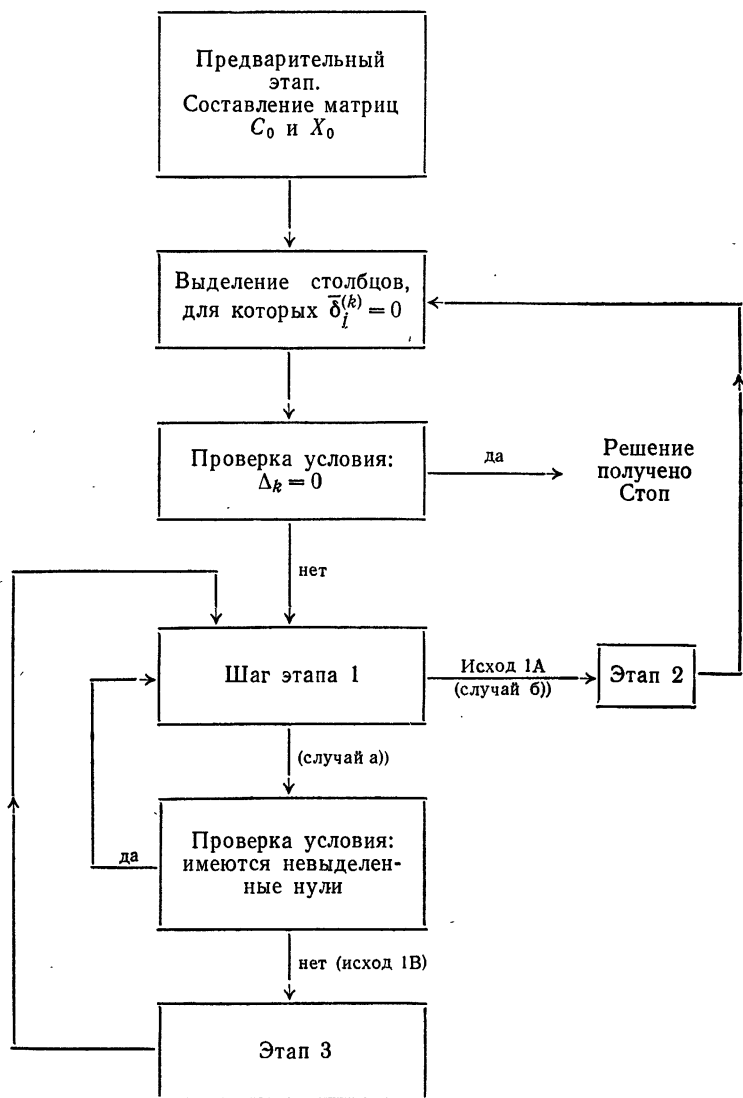


Рис. 5.2. Блок-схема алгоритма венгерского метода для задачи типа  $T$ .

## § 5. Обоснование алгоритма для транспортной задачи

5.1. Обоснование алгоритма ничем существенным не отличается от проведенного выше обоснования метода решения проблемы выбора. Поэтому мы изложим его кратко, выделяя лишь те моменты, которые присущи транспортной задаче в общем виде. Предварительный этап, так же как и этап 1, дополнительных пояснений не требует.

Этап 2. Обоснование построения цепочки проводится аналогично тому, как это делалось в проблеме выбора.

Действительно, однозначность формирования цепочки следует из того, что в каждом столбце (каждой строке) матрицы  $C_k$  содержится не более одного нуля со звездой (со штрихом). Отсутствие циклов в (4.11) (конечность цепочки) вытекает из одновременности отметок (звездой или штрихом) нулей, составляющих цепочку: при любых  $t_1, t_2, t_2 \geq 1, t_1$ -й нуль цепочки отмечался позже  $(t_1 + t_2)$ -го нуля. Далее цепочка (4.11) обязательно обрывается нулем со штрихом, так как в строке любого нуля со звездой имеется нуль со штрихом. Перейдем к выяснению свойств матрицы  $X_{k+1}$ , составленной по формулам (4.12).

Согласно формуле (4.12) при построении  $X_{k+1}$  уменьшаются лишь те элементы матрицы  $X_k$ , которые соответствуют четным элементам цепочки (4.11) (нулям со звездой), причем на величину, не превосходящую минимума уменьшаемых элементов. Значит,

$$x_{ij}^{(k+1)} \geq 0.$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} &= \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)}, & \text{если } i \neq \lambda_1, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} &= \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k+1)}, & \text{если } j \neq \mu_s. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

В самом деле, в каждой строке матрицы  $C_k$ , отличной от  $\lambda_1$ -й, равно как и в каждом ее столбце, отличном от  $\mu_s$ -го, либо вовсе нет элементов цепочки (4.11), либо

имеются два таких элемента, которые в цепочке (4.11) стоят рядом. Поэтому при образовании матрицы  $X_{k+1}$  в  $i$ -й строке,  $i \neq \lambda_1$  (в  $j$ -м столбце,  $j \neq \mu_s$ ), матрицы  $X_k$  либо все элементы остаются неизменными, либо один уменьшается на  $\theta_k$ , а другой увеличивается на ту же величину, т. е. соотношения (5.1) действительно имеют место. Заметим также, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{\lambda_1 j}^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n x_{\lambda_1 j}^{(k)} + \theta_k, \\ \sum_{i=1}^m x_{i \mu_s}^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^m x_{i \mu_s}^{(k)} + \theta_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Из условия

$$\theta_k \leq \min \{ \delta_{\lambda_1}^{(k)}, \delta_{\mu_s}^{(k)} \}$$

и соотношений (5.1), (5.2) следует, что элементы матрицы  $X_{k+1}$  удовлетворяют системе неравенств (4.9), если этой системе удовлетворяли элементы матрицы  $X_k$ . Следовательно, при переходе к матрице  $X_{k+1}$  система неравенств (4.9) не нарушается.

Используя равенства (5.1) и (5.2), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} - 2\theta_k = \Delta_k - 2\theta_k. \end{aligned}$$

Но  $\theta_k > 0$ , поскольку при  $2 \leq t \leq s$  элементы  $x_{\lambda_t \mu_{t-1}} > 0$  ( $c_{\lambda_t \mu_{t-1}}^{(k)}$  — нуль со звездой),  $\delta_{\lambda_1} > 0$  (условие перехода к этапу 2),  $\delta_{\mu_s} > 0$  (условие обрыва цепочки (4.11)). Следовательно,

$$0 \leq \Delta_{k+1} = \Delta_k - 2\theta_k < \Delta_k. \quad (5.3)$$

Этап 3. После проведения этапа 3 (перехода к матрице  $C_k^{(1)}$ ) образуется по крайней мере один невыделенный нуль. Следующий далее этап 1 либо приведет к этапу 2, либо увеличит число выделенных строк в матрице  $C_k^{(1)}$ .

Заметим, что выделяются только те строки, которым отвечают нулевые невязки матрицы  $X_k$ . Допустим, что после нескольких пар этапов 3, 1 все строки с нулевыми невязками выделены. Число строк с нулевыми невязками строго меньше  $m$  (так как  $\Delta_k > 0$ ). Поэтому невыделенные элементы существуют и расположены в строках с положительными невязками. Последующий этап 3 приведет к невыделенным нулям, каждый из которых лежит в строке с положительной невязкой. Следовательно, очередной этап 1 состоит всего из одного шага и завершается исходом 1А.

Итак, число этапов 3 в  $(k+1)$ -й итерации не превышает более чем на единицу количество строк, отвечающих нулевым невязкам матрицы  $X_k$ .

Предположим, что объемы производства и потребления исследуемой задачи — целые числа. В таком случае  $\theta_k$  — целое число, и в соответствии с формулой (5.3) каждая итерация метода уменьшает суммарную невязку  $\Delta_k$  по меньшей мере на 2. Следовательно, через конечное число  $d$  итераций величина  $\Delta_d$  окажется равной нулю.

5.2. Покажем, что  $X_d$  — оптимальный план задачи  $T$ . Поскольку при любом  $k$  элементы матрицы  $X_k$  удовлетворяют системе неравенств (4.9),

$$\delta_i^{(k)} \geq 0, \quad \delta_j^{(k)} \geq 0.$$

Из равенств

$$\Delta_d = 2 \sum_{i=1}^m \delta_i^{(d)} = 2 \sum_{j=1}^n \delta_j^{(d)} = 0$$

получаем

$$\delta_i^{(d)} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(d)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\delta_j^{(d)} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(d)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая неотрицательность элементов матрицы  $X_d$  (она была доказана при обосновании этапа 2), делаем вывод о том, что  $X_d$  — план исследуемой задачи  $T$ . Доказательство оптимальности плана  $X_d$  опирается на три вспомогательных замечания.

**Замечание 1.** При любом  $r$  из положительности  $x_{ij}^{(r)}$  следует, что  $c_{ij}^{(r)} = 0$ .

Для  $r=0$  справедливость утверждения следует из способа построения матрицы  $X_0$  (см. предварительный этап). Покажем, что при переходе от  $k$  к  $k+1$  справедливость замечания 1 не может быть нарушена. Допустим, что в  $(k+1)$ -й итерации этап 3 используется  $p$  раз. Если  $x_{ij}^{(k)} > 0$ , то, по предположению индукции, элемент  $c_{ij}^{(k)} = 0$  и в соответствии с этапом 1 расположен либо в выделенной строке, либо в выделенном столбце  $C_k$ . Поэтому  $c_{ij}^{(k, 1)} = c_{ij}^{(k)} = 0$  (см. этап 3). Те же рассуждения приводят к системе равенств

$$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k, 1)} = \dots = c_{ij}^{(k, p)} = c_{ij}^{(k+1)} = 0.$$

Заметим также, что элементы матрицы  $C_k^{(p)} = C_{k+1}$ , входящие в цепочку, составленную для построения матрицы  $X_{k+1}$ , равны нулю. Пусть теперь  $x_{ij}^{(k+1)} > 0$ . Рассмотрим два случая:

$$\text{а) } x_{ij}^{(k)} > 0; \quad \text{б) } x_{ij}^{(k)} = 0.$$

В случае а), как было показано,  $c_{ij}^{(k+1)} = 0$ . Если же имеет место случай б), то  $c_{ij}^{(k+1)}$  является нечетным элементом цепочки и, следовательно, также равен нулю.

**Замечание 2.** Любая из матриц  $C_k$  состоит из неотрицательных элементов.

Это утверждение следует из того, что, согласно алгоритму (см. этап 3), при переходе от одной матрицы к другой из уменьшаемых элементов первой матрицы вычитается их минимум.

Пусть  $C$  и  $D$  — прямоугольные матрицы одинаковых размеров,  $T(C)$  и  $T(D)$  — транспортные задачи с одними и теми же объемами производства и потребления  $(a_i, i=1, \dots, m; b_j, j=1, \dots, n)$  и матрицами транспортных издержек, равными  $C$  и  $D$  соответственно.

**Замечание 3.** Если матрица  $C$  эквивалентна матрице  $D$  ( $C \sim D$ ), то любое решение задачи  $T(C)$  является оптимальным планом задачи  $T(D)$ .

По предположению

$$\|c_{ij}\|_{m, n} = \|d_{ij} + \alpha_i + \beta_j\|_{m, n}.$$

Пусть  $X^* = \|x_{ij}^*\|_{m,n}$  — решение задачи  $T(C)$ , а  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  — произвольный план задач  $T(D)$  и  $T(C)$ . В силу эквивалентности матриц  $C$  и  $D$  и условий задач  $T(C)$  и  $T(D)$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \alpha_i + \beta_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \rho, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\rho = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$$

не зависит от плана  $X$ . Учитывая, что  $X^*$  — решение задачи  $T(C)$ , получаем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^*,$$

или

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \rho \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* - \rho.$$

Последнее неравенство в силу (5.4) может быть переписано в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^*.$$

Следовательно,  $X^*$  — оптимальный план задачи  $T(D)$ .

Перейдем к доказательству оптимальности плана  $X_d$ . Рассмотрим вспомогательную транспортную задачу с матрицей транспортных издержек  $C_d$  и прежними объемами производства и потребления. Поскольку  $c_{ij}^{(d)} \geq 0$  (замечание 2), для любого плана  $X$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(d)} x_{ij} \geq 0. \quad (5.5)$$

С другой стороны, в силу замечания 1

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(d)} x_{ij}^{(d)} = 0. \quad (5.6)$$

Сравнивая соотношения (5.5), (5.6), делаем вывод о том, что  $X_d$  — решение вспомогательной задачи. Но согласно правилам перехода от  $G_k$  к  $G_{k+1}$  (этап 3), матрица  $C \sim C_d$ . Поэтому план  $X_d$  является оптимальным и для исследуемой задачи  $T$  (замечание 3).

Итак, в предположении целочисленности объемов производства и потребления задачи  $T$  венгерский метод приводит к ее решению за конечное число итераций.

## § 6. Пример

Приведем численный пример. Требуется найти решение транспортной задачи с матрицей транспортных издержек

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

и вектором производства — потребления

$$(a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4) = (4, 2, 3, 3; 3, 6, 2, 1).$$

Предварительный этап

а)

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow C_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица  $C_0$  получена из  $C$  вычитанием чисел 2, 3, 1, 2 из элементов столбцов с номерами 1, 2, 3, 4 соответственно.

б)

$$X_0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$


---


$$\begin{matrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Во 2-м столбце справа от  $X_0$  записаны величины невязок для пунктов производства (невязки строк).

Во 2-й строке ниже  $X_0$  выписаны величины невязок для пунктов потребления (невязки столбцов).

Поскольку  $\frac{1}{2}\Delta_0 = 3 > 0$ , необходимо приступить к итерации I.

Итерация I.

$$C_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & + \end{array} \\ \begin{array}{l} \times \left\| \begin{array}{cccc} \bar{0} & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 0' & 4 & 6 \\ 5 & 0' & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & \bar{0} \end{array} \right\| + \\ + \end{array} \end{array} \xrightarrow{h=2} C_0^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \oplus \uparrow & + \end{array} \\ \begin{array}{l} \times \left\| \begin{array}{cccc} \bar{0} & 0' & 6 & 3 \\ 8 & 0' & 4 & 8 \\ 7 & 0' & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & \bar{0} \end{array} \right\| + \\ + \end{array} \end{array} = C_1.$$

Для удобства проведения этапа 1 строки матриц  $C_0$ ,  $C_0^{(1)}$ , которым соответствуют, согласно  $X_0$ , положительные невязки, отмечаются значками «X», стоящими слева от них.  $X_0$ -существенные элементы матриц  $C_0$ ,  $C_1$ , лежащие в выделенных столбцах, отмечаются черточкой. Предварительно выделяем столбцы 1, 4.

Этап 1 (1) состоит из двух шагов: отмечены строки 2, 3. Далее следует этап 3 при  $h=2$ .

Этап 1 (2) состоит из одного шага и заканчивается случаем 1А (переход к этапу 2).

Этап 2 в этой итерации чрезвычайно прост: цепочка состоит всего из одного элемента. Переходим от  $X_0$  к  $X_1$ :

$$X_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \end{array} \xrightarrow{\partial_1=1} X_1 = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

0   1   2   0

0   0   2   0

Итак, итерация I состоит из этапов 1, 3, 1 и 2.

Поскольку  $\frac{1}{2} \Delta_1 = 2 > 0$ , переходим к итерации II.

Итерация II. Эта итерация проводится без дополнительных пояснений, так как все необходимые замечания были сделаны ранее:

$$C_1 = \left\| \begin{array}{cc|cc} \oplus & \oplus & & \\ \hline \bar{0}^* & \bar{0}' & 6 & 3 \\ 8 & \bar{0}' & 4 & 8 \\ 7 & \bar{0}^* & 0' & 4 \\ \hline x & 3 & 4 & 4 & \bar{0} \end{array} \right\| + \xrightarrow{h=3} C_1^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc|cc} & & & \\ \hline 0^* & 0' & 6 & 6 \\ 8 & 0' & 4 & 11 \\ 7 & 0^* & 0' & 7 \\ \hline x & 0' & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right\| + = C_2,$$

$$X_1 = \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & \end{array} \right\| \xrightarrow{\theta_2=2} X_2 = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right\|.$$

Итерация II состоит из этапов 1, 3, 1 и 2. Поскольку  $\Delta_2 = 0$ ,  $X_2$  является оптимальным планом исследуемой задачи.

## § 7. Венгерский метод и метод последовательного сокращения невязок

В начале главы уже отмечалась идейная общность венгерского метода и метода сокращения невязок. Ниже устанавливается, что венгерский метод является по существу детализацией метода последовательного сокращения невязок для одной из частных задач линейного программирования — для транспортной задачи.

Перепишем транспортную задачу  $T$  в векторной форме. Требуется обратить в минимум линейную форму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

при соблюдении условий

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} P_{ij} = P,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь, как обычно,  $P_{ij}$  — вектор коммуникаций,  $P$  — вектор производства — потребления.

Задача  $\tilde{T}$ , сопряженная задаче  $T$ , состоит, как мы видели, в выборе вектора  $W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ , максимизирующего линейную форму

$$(W, P) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i$$

при условиях

$$(W, P_{ij}) \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которые в силу специфики векторов  $P_{ij}$  могут быть переписаны еще и так:

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним общую схему метода сокращения невязок применительно к задаче  $T$ . Вначале разыскивается некоторый план

$$W_0 = (-u_1^{(0)}, -u_2^{(0)}, \dots, -u_m^{(0)}, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)})$$

задачи  $\tilde{T}$  и выделяются те из векторов  $P_{ij}$ , для которых

$$(W_0, P_{ij}) = v_j - u_i = c_{ij}. \quad (7.1)$$

С помощью выделенных векторов формируется вспомогательная задача  $T_{W_0}$ , связанная с планом  $W_0$  задачи  $\tilde{T}$ . Она состоит в минимизации линейной формы

$\sum_{i=1}^{n+m} e_i$  при условиях

$$\sum_{(i, j) \in E_0} x_{ij} P_{ij} + \sum_{i=1}^{n+m} e_i e_i = P,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E_0, \quad e_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+m.$$

Здесь через  $E_0$  обозначена совокупность пар индексов  $(i, j)$ , для которых справедливо равенство (7.1); векто-

ры  $e_1, e_2, \dots, e_{n+m}$  составляют полный набор единичных векторов  $(n+m)$ -мерного пространства. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n+m} e_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{(i,j) \in E_0} x_{ij},$$

то сформулированная задача эквивалентна следующей:  
максимизировать

$$\sum_{(i,j) \in E_0} x_{ij}$$

при соблюдении условий

$$\sum_{(i,j) \in E_0} x_{ij} P_{ij} \leq P,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in E_0.$$

Пусть  $\|x_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$  — решение задачи  $T_{W_0}$  (при  $(i,j) \notin E_0$   $x_{ij}^{(1)}$  полагается равным нулю).

Если

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} = 0,$$

то  $X_1 = \|x_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$  — искомое решение задачи  $T$ .

Если же  $\Delta_1 > 0$ , с помощью матрицы  $X_1$  строится новый план  $W_1 = (-u_1^{(1)}, -u_2^{(1)}, \dots, -u_m^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$  задачи  $T$ , увеличивающий ее линейную форму. Затем весь процесс повторяется, отправляясь от найденного вектора  $W_1$ . Через конечное число итераций мы приходим к такому плану  $W_r$  задачи  $T$ , что решение вспомогательной задачи  $T_{W_r}$  является планом задачи  $T$  (т. е.  $\Delta_{r+1} = 0$ ). Полученная матрица совпадает с оптимальным планом исследуемой задачи  $T$ .

Покажем, что алгоритм венгерского метода полностью укладывается в изложенную схему. Обозначим через

$$-u_1^{(0)}, -u_2^{(0)}, \dots, -u_m^{(0)} \quad (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)})$$

величины, которые в предварительном этапе вычитаются из соответствующих строк (столбцов) матрицы  $C$ .

Вектор

$$W_0 = (-u_1^{(0)}, -u_2^{(0)}, \dots, -u_m^{(0)}, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)})$$

является планом задачи  $T$ , так как, согласно алгоритму,  $c_{ij}^{(0)} = c_{ij} - (v_j - u_i) \geq 0$  для всех  $i, j$ .

Таким образом, на предварительном этапе выбирается некоторый план  $W_0$  задачи  $T$  и выделяются те позиции  $(i, j)$ , для которых

$$c_{ij} - (v_j - u_i) = c_{ij}^{(0)} = 0.$$

Кроме того, на этом же этапе строится исходный план  $X_0 = \|x_{ij}^{(0)}\|_{m, n}$  вспомогательной задачи  $T_{W_0}$ , определяемой планом  $W_0$ . Пусть  $X_1 = \|x_{ij}^{(1)}\|_{m, n}$  — матрица, образуемая из  $X_0$  до первого перехода к этапу 3. Эта матрица строится, вообще говоря, в результате применения некоторого числа этапов 1, 2. В частности, если за первым же этапом 1 следует этап 3,  $X_1 = X_0$ . Покажем, что матрица  $X_1$  является решением вспомогательной задачи  $T_{W_0}$ . Поскольку последний из этапов 1 завершился случаем 1В, все нули матрицы  $C_0$  лежат в выделенных линиях. Пусть  $i_1, i_2, \dots, i_\lambda; j_1, j_2, \dots, j_\mu$  — индексы выделенных строк и столбцов матрицы  $C_0$  соответственно. Выделим те же линии в матрице  $X_1$ . Согласно правилам выделения  $x_{ij}^{(1)} > 0$  лежит в одной из выделенных линий: либо в строке, либо в столбце. Учитывая далее справедливость для выделенных линий равенств

$$\sum_{j=1}^n x_{i_s j}^{(1)} = a_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, \lambda,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i j_s}^{(1)} = b_{j_s}, \quad s = 1, 2, \dots, \mu,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\lambda} a_{i_s} + \sum_{s=1}^{\mu} b_{j_s}. \quad (7.2)$$

Пусть  $\bar{X}_1 = \|\bar{x}_{ij}^{(1)}\|_{m, n}$  — произвольный план задачи  $T_{W_0}$ . Поскольку  $\bar{x}_{ij}^{(1)} > 0$  лишь при условии  $c_{ij}^{(0)} = 0$ , все положительные элементы  $\bar{X}_1$  расположены в выделенных

линиях. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij}^{(1)} \leq \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij}^{(1)} + \sum_{s=1}^{\mu} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}^{(1)} \leq \sum_{s=1}^{\lambda} a_{i_s} + \sum_{s=1}^{\mu} b_{j_s}. \quad (7.3)$$

Сравнение неравенства (7.3) с равенством (7.2) доказывает наше утверждение.

Если матрица  $X_1$  — план задачи  $T$  ( $\Delta_1=0$ ), то она является решением этой задачи. Если же

$$2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} < \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j,$$

то необходим переход к этапу 3, на котором разыскивается новый план задачи  $\tilde{T}$  и, следовательно, ставится новая вспомогательная задача. Рассмотрим задачу  $\tilde{T}_{W_0}$ , сопряженную вспомогательной задаче  $T_{W_0}$ , которая состоит в отыскании вектора  $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ , обращающего в максимум форму

$$\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j$$

при условиях

$$\alpha_i + \beta_j \leq 0 \quad \text{для } (i, j) \in E_0,$$

$$\alpha_i \leq 1, \quad \beta_j \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

После того как найдено решение задачи  $T_{W_0}$ , оптимальный план сопряженной задачи  $\tilde{T}_{W_0}$  определяется автоматически:

$$\alpha_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \neq i_s, \\ -1, & i = i_s, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, \lambda,$$

$$\beta_j^{(1)} = \begin{cases} 1, & j \neq j_s, \\ -1, & j = j_s, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, \mu.$$

В самом деле, позиции  $(i, j) \in E_0$  расположены в выделенных линиях. Следовательно, при  $(i, j) \in E_0$  величина  $\alpha_i^{(1)} + \beta_j^{(1)}$  равна либо 0, либо  $-2$ , и вектор  $\gamma_1 = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}; \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)})$  является планом задачи  $\tilde{T}_{W_0}$ .

С другой стороны,  $x_{ij}^{(1)} > 0$  расположен лишь в *одной* из выделенных линий, откуда  $\alpha_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} = 0$  при  $x_{ij}^{(1)} > 0$ . Кроме того, неравенства

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(1)} < b_j, \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} < a_i \quad (7.5)$$

возможны лишь для невыделенных линий. Поэтому для тех  $j(i)$ , при которых имеет место неравенство (7.4) ((7.5)),  $\beta_j^{(1)} = 1$  ( $\alpha_i^{(1)} = 1$ ). Используя эти условия, нетрудно прийти к равенству

$$\sum_{i=1}^{m+n} e_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n b_j \beta_j^{(1)} + \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i^{(1)*},$$

указывающему на оптимальность построенного плана задачи  $\tilde{T}_{W_0}$ . В соответствии с методом сокращения невязок определяется новый план задачи  $\tilde{T}$

$$W_1 = W_0 + \theta \gamma_1,$$

где

$$\theta = \min_{\alpha_i + \beta_j > 0} \frac{c_{ij}^{(0)}}{\alpha_i + \beta_j}.$$

Но  $\alpha_i + \beta_j > 0$  ( $\alpha_i + \beta_j = 2$ ) лишь для позиций  $(i, j)$ , расположенных вне выделенных линий. Итак,

$$\theta = \frac{1}{2} \min c_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} h,$$

где минимум берется по всем невыделенным элементам

---

\*) Мы использовали вспомогательную задачу  $T_{W_0}$  в первой формулировке:

$$e_i^{(1)} = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$e_{m+j}^{(1)} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

матрицы  $\|c_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$ . Пусть

$$\begin{aligned}\|c_{ij}^{(1)}\|_{m,n} &= \|c_{ij}^{(0)}\|_{m,n} - \|\alpha_i^{(1)} + \beta_j^{(1)}\| \theta = \\ &= \|c_{ij}\|_{m,n} - \|v_j^{(0)} - u_i^{(0)} + \theta(\alpha_i^{(1)} + \beta_j^{(1)})\|_{m,n} = \\ &= \|c_{ij}\|_{m,n} - \|v_j^{(1)} - u_i^{(1)}\|_{m,n}.\end{aligned}$$

Нулевые элементы матрицы  $\|c_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$  определяют совокупность векторов условий задачи  $T_{W_1}$ , связанной с вновь построенным планом

$$W_1 = (-u_1^{(1)}, -u_2^{(1)}, \dots, -u_m^{(1)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)})$$

сопряженной задачи  $\tilde{T}$ . В соответствии с определением матрица  $C_1 = \|c_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$  строится по матрице  $C_0 = \|c_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$  следующим образом: из невыделенных элементов  $C_0$  вычитается  $h = 2\theta$ , к элементам  $C_0$ , лежащим на пересечении двух выделенных линий,  $h$  прибавляется; остальные элементы  $C_0$  не меняются. Следовательно, матрица  $C_1 = \|c_{ij}^{(1)}\|_{m,n}$  совпадает с результатом применения этапа 3 к матрице  $C_0 = \|c_{ij}^{(0)}\|_{m,n}$ .

Итак, этап 3 действительно состоит в построении новой вспомогательной задачи в полном соответствии с методом сокращения невязок. Приведенные рассуждения показывают, что венгерский метод в точности следует общей схеме метода сокращения невязок: между двумя соседними этапами 3 решается очередная вспомогательная задача, на каждом из этапов 3 строится новая вспомогательная задача. Отличительная особенность венгерского метода состоит лишь в оригинальном способе решения вспомогательной задачи, учитывающем специфику задачи  $T$ .

## § 8. Общая характеристика венгерского метода

**8.1.** Венгерский метод наиболее эффективен в применении к транспортным задачам с целочисленными объемами производства и потребления. В этом случае число операций, необходимых для решения задачи, может быть оценено заранее. Действительно, если в предварительном этапе алгоритма построена матрица  $X_0$  с

суммой невязок  $\Delta_0$ , то для получения решения задачи необходимо провести не более  $\frac{1}{2} \Delta_0$  итераций (на каждой итерации сумма невязок уменьшается в худшем случае на 2). Обычно решение транспортной задачи связано с меньшим чем  $\frac{1}{2} \Delta_0$  числом итераций. В примере, решенном в § 6,  $\frac{1}{2} \Delta_0 = 3$ , а оптимальный план был получен за две итерации. Что касается отдельной итерации, то ее трудоемкость может быть оценена в зависимости от чисел  $n$  и  $m$ .

8.2. Немаловажное достоинство венгерского метода состоит в том, что с его помощью можно не только получить решение транспортной задачи, но и оценить близость результата каждой из итераций к оптимальному плану перевозок. Имея подобные оценки, можно контролировать ход вычислений и оборвать процесс, как только отклонение от оптимального плана достигнет определенного предела. Это обстоятельство особенно важно для задач с большим числом пунктов производства и потребления, так как часто позволяет существенно сократить вычислительную работу. Остановимся на способе получения указанных оценок.

Пусть результатом  $k$ -й итерации венгерского метода, примененного к задаче  $T$ , являются матрицы

$$X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|, \quad C_k = \|c_{ij}^{(k)}\|.$$

Согласно алгоритму венгерского метода

$$C_k = \|c_{ij}^{(k)}\| = \|c_{ij} - (v_j^{(k)} + u_i^{(k)})\|,$$

где  $C = \|c_{ij}\|$  — матрица транспортных издержек задачи  $T$ , причем  $c_{ij}^{(k)} \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Величины  $u_i^{(k)}$ ,  $v_j^{(k)}$  нетрудно получить, пользуясь равенством

$$C - C_k = \|c_{ij} - c_{ij}^{(k)}\| = \|v_j^{(k)} + u_i^{(k)}\|.$$

Положим  $u_1^{(k)} = 0$ ; тогда

$$v_j^{(k)} = c_{1j} - c_{1j}^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i^{(k)} = c_{i1} - c_{i1}^{(k)} - v_1^{(k)} = c_{i1} - c_{i1}^{(k)} + c_{11}^{(k)} - c_{11}, \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

Таким образом, для отыскания

$$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}, v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}$$

достаточно подсчитать элементы первой строки и первого столбца матрицы

$$C - C_k = \|c_{ij} - c_{ij}^{(k)}\|.$$

Как известно, задача  $\tilde{T}$ , сопряженная задаче  $T$ , состоит в максимизации линейной формы

$$\sum_{j=1}^n b_j v_j + \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad (8.1)$$

при соблюдении условий

$$v_j + u_i \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2)$$

Поскольку

$$c_{ij}^{(k)} = c_{ij} - (u_i^{(k)} + v_j^{(k)}) \geq 0$$

$$\text{для } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то

$$(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_m^{(k)}; v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}) - \text{план задачи } \tilde{T}.$$

Если через  $L_{\min}$  обозначить минимальные суммарные транспортные издержки в задаче  $T$ , то в соответствии с известным результатом теории двойственности

$$\sum_{j=1}^n v_j^{(k)} b_j + \sum_{i=1}^m u_i^{(k)} a_i \leq L_{\min}. \quad (8.3)$$

Неравенство (8.3) дает оценку снизу для суммарных транспортных издержек, отвечающих оптимальному плану перевозок. Для получения верхней оценки для  $L_{\min}$  используем матрицу  $X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|$ . Вспомним, что при любом  $k$  система перевозок  $\|x_{ij}^{(k)}\|$  обладает свойствами

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} = b_j^{(k)} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} = a_i^{(k)} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Поэтому, положив

$$\delta_i^{(k)} = b_i - b_i^{(k)}, \quad \delta_i^{(k)} = a_i - a_i^{(k)},$$

получаем

$$\delta_i^{(k)} \geq 0, \quad \delta_i^{(k)} \geq 0.$$

Выделим из пунктов производства задачи  $T$  такие, из которых с помощью системы перевозок  $X_k$  вывозится не весь продукт:

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s} \quad (\delta_{i_\lambda}^{(k)} > 0, \lambda = 1, 2, \dots, s).$$

Аналогично из пунктов потребления задачи выделим те, которые система перевозок  $X_k$  полностью не удовлетворяет:

$$B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_t} \quad (\delta_{j_\lambda}^{(k)} > 0, \lambda = 1, 2, \dots, t).$$

Выберем теперь некоторый план перевозок для транспортной задачи  $T^{(k)}$  с пунктами производства  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}$ , обладающими объемами производства  $\delta_{i_1}^{(k)}, \delta_{i_2}^{(k)}, \dots, \delta_{i_s}^{(k)}$  и пунктами потребления  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_t}$ , которым соответствуют объемы потребления  $\delta_{j_1}^{(k)}, \delta_{j_2}^{(k)}, \dots, \delta_{j_t}^{(k)}$ . Это можно сделать, используя метод минимального элемента. Обозначим найденный план, дополненный нулевыми перевозками, через

$$\Delta X_k = \|\Delta x_{ij}^{(k)}\|$$

( $\Delta x_{ij}^{(k)} = 0$ , если либо  $i \neq i_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ , либо  $j \neq j_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, t$ ). Нетрудно убедиться, что

$$\|\tilde{x}_{ij}^{(k)}\| = \|x_{ij}^{(k)}\| + \|\Delta x_{ij}^{(k)}\|$$

— план задачи  $T$ . Поэтому

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij}^{(k)} \geq L_{\min}. \quad (8.4)$$

Итак, имея матрицы  $X_k$  и  $C_k$ , являющиеся результатом  $k$ -й итерации венгерского метода, можно получить план исследуемой задачи  $\tilde{X}_k = \|\tilde{x}_{ij}^{(k)}\|$  и оценить его отклонение

от оптимального плана  $X^* = \|x_{ij}^*\|$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij}^{(k)} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij}^{(k)} - \left[ \sum_{i=1}^m a_i u_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n b_j v_j^{(k)} \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

**8.3.** Важным преимуществом венгерского метода является его нечувствительность к явлению вырожденности. Существенное достоинство метода состоит также в экономном образовании цепочек (поиск элементов цепочки достаточно прост и не требует предварительного построения разветвленной сети из положительных элементов плана, необходимой в методе потенциалов). Последнее обстоятельство облегчает использование венгерского метода для решения транспортных задач на вычислительных машинах.

### § 9. Венгерский метод для транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций

Венгерский метод можно распространить на транспортные задачи типа  $T_d$ .

Рассмотрим задачу  $T_d$ , состоящую в минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (9.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4)$$

Излагаемый ниже алгоритм мало отличается от метода решения задачи  $T$ , описанного в предыдущем параграфе. Тем не менее наличие дополнительных ограниче-

ний требует ряда изменений в каждом из этапов метода. Чтобы сделать материал параграфа более ясным, мы не только коснемся этих изменений, но и дадим детальное описание всего алгоритма. В дальнейшем будет удобно использовать следующее определение.

Элемент  $c_{ij}$  матрицы  $C = \|c_{ij}\|_{m, n}$  назовем *X-неполным*, если в плане  $X$  задачи  $T_d$  перевозка  $x_{ij}$  меньше своего предельного значения  $d_{ij}$ . Если же  $x_{ij} = d_{ij}$ , то элемент  $c_{ij}$  называется *X-полным*.

Под *X-существенным* элементом матрицы  $C$  будем, как обычно, понимать любой элемент  $c_{ij}$ , отвечающий  $x_{ij} > 0$ . Элемент  $c_{ij}$  считается *X-несущественным*, если  $x_{ij} = 0$ . Алгоритм решения задачи  $T_d$ , основанный на венгерском методе, складывается из предварительного этапа и ряда последовательно проводимых итераций.

**Предварительный этап.** В каждом столбце матрицы  $C$  разыскиваем минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов данного столбца. В результате образуется матрица  $C'$ . Далее из всех элементов каждой строки матрицы  $C'$  вычитаем минимальный элемент соответствующей строки. Получаем матрицу  $C'' = C_c = \|c_{ij}^{(0)}\|_{m, n}$  с неотрицательными элементами, в каждой линии которой имеется хотя бы один нуль. После этого формируем матрицу  $X_0 = \|x_{ij}^{(0)}\|_{m, n}$ , процесс построения которой осуществляется по столбцам. Пусть уже заполнены первые  $j-1$  столбцов матрицы  $X_0$ . Перенумеруем нули  $j$ -го столбца матрицы  $C_0$  сверху вниз и обозначим через  $i_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r_j$ , номер строки, содержащей  $k$ -й нуль этого столбца. Элементы  $j$ -го столбца определяются один за другим в соответствии с рекуррентной формулой

$$x_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq i_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, r_j, \\ \min \left\{ a_i - \sum_{\mu=1}^{j-1} x_{i\mu}^{(0)}, \quad b_j - \sum_{\mu=1}^{i-1} x_{\mu j}^{(0)}, \quad d_{ij} \right\}, & \text{если } i = i_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, r_j. \end{cases}$$

Если суммарная невязка матрицы  $X_0$

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0,$$

то  $X_0$  — решение задачи  $T_d$ . Если же  $\Delta_0 > 0$ , необходимо приступить к итерации I. Каждая итерация алгоритма в общем случае включает три различных этапа. Начинается итерация этапом 1, затем несколько раз повторяется пара этапов 3, 1 (в частности, итерация может не содержать ни одной такой пары). Заканчивается итерация этапом 2 либо установлением неразрешимости данной задачи.

Допустим, что уже осуществлено  $k$  итераций алгоритма, в результате которых получены матрицы

$$C_k = \|c_{ij}^{(k)}\|_{m, n} \quad \text{и} \quad X_k = \|x_{ij}^{(k)}\|_{m, n}.$$

Пусть

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} > 0$$

и еще не установлена неразрешимость задачи  $T_d$ . В таком случае необходимо, отправляясь от матриц  $C_k$  и  $X_k$ , перейти к следующей,  $(k+1)$ -й итерации. Перед началом итерации выделяются (значком «+») те столбцы матрицы  $C_k$ , для которых невязки

$$\tilde{\delta}_j = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} = 0.$$

**Этап 1.** Выбирается произвольный невыделенный  $X_k$ -неполный нуль матрицы  $C_k$ . Если это  $c_{ij}^{(k)}$ , то вычисляется невязка

$$\delta_i^{(k)} = a_i - \sum_{\mu=1}^n x_{i\mu}^{(k)}.$$

Может представиться одна из следующих возможностей:

$$\text{а) } \delta_i^{(k)} = 0; \quad \text{б) } \delta_i^{(k)} > 0.$$

В случае а) выделяется (значком «+»)  $i$ -я строка матрицы  $C_k$ , элемент  $c_{ij}^{(k)}$  отмечается штрихом. Если на пересечении  $\mu$ -го выделенного столбца и  $i$ -й строки матрицы  $C_k$  расположен  $X_k$ -существенный нуль, то знак выделения этого столбца уничтожается, а элемент  $c_{i\mu}^{(k)}$  отмечается звездой. В случае б) элемент  $c_{ij}^{(k)}$  отмечается штрихом, после чего переходят к этапу 2.

Описанная последовательность операций, связанная с одним  $X_k$ -неполным нулем матрицы  $C_k$ , составляет отдельный шаг этапа 1. Этап 1 складывается из нескольких однотипных шагов и завершается либо обнаружением на последнем шаге альтернативы б), либо выделением всех  $X_k$ -неполных нулей матрицы  $C_k$ . В первом случае будем говорить об исходе 1А. Вторая возможность подразделяется на следующие два исхода: исход 1В, когда среди невыделенных элементов матрицы  $C_k$  имеются положительные либо среди дважды выделенных элементов этой матрицы (т. е. элементов, расположенных на пересечениях выделенных строк и выделенных столбцов) имеются отрицательные, и исход 1С, когда все невыделенные элементы  $C_k$  неположительны, а дважды выделенные элементы неотрицательны.

Исход 1А требует перехода к этапу 2, исход 1В указывает на необходимость проведения этапа 3 и, наконец, исход 1С означает неразрешимость задачи вследствие несовместимости ее условий (9.2) — (9.4).

Этап 2 состоит в построении цепочки из нулей матрицы  $C_k$ , отмеченных штрихами или звездами, с помощью которой осуществляется переход от матрицы  $X_k$  к матрице  $X_{k+1}$ .

Итак, пусть этап 1 завершился исходом 1А, т. е. для некоторого невыделенного  $X_k$ -неполного нуля, расположенного например, в  $\lambda_1$ -й строке и  $\mu_1$ -м столбце матрицы  $C_k$ , имеет место альтернатива б). Этот элемент принимается за начало цепочки из отмеченных нулей матрицы  $C_k$ . Цепочка строится в соответствии со следующим правилом. В  $\mu_1$ -м столбце матрицы  $C_k$  выбирается нуль со звездой  $0_{\lambda_2\mu_1}^*$ . В  $\lambda_2$ -й строке выбираем нуль со штрихом  $0'_{\lambda_2\mu_2}$ . Далее в  $\mu_2$ -м столбце находится нуль со звездой  $0_{\lambda_3\mu_2}^*$  и т. д. Процесс построения цепочки, складывающийся из последовательных переходов от нуля со штрихом к нулю со звездой по столбцу и от нуля со звездой к нулю со штрихом по строке, всегда обрывается на нуле со штрихом (в столбце этого нуля нет нуля со звездой). В результате образуется цепочка вида

$$0'_{\lambda_1\mu_1}, 0_{\lambda_2\mu_1}^*, 0'_{\lambda_2\mu_2}, \dots, 0'_{\lambda_{s-1}\mu_{s-1}}, 0_{\lambda_s\mu_{s-1}}^*, 0'_{\lambda_s\mu_s}. \quad (9.5)$$

Нули цепочки (9.5) определяют позиции матрицы  $X_k$ , в которых расположены элементы, подлежащие изменению при переходе к матрице  $X_{k+1}$ .

Элементы  $x_{ij}^{(k+1)}$  матрицы  $X_{k+1}$  вычисляются по рекуррентной формуле

$$x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} x_{ij}^{(k)}, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ — не входит в цепочку (9.5),} \\ x_{ij}^{(k)} + \theta_k, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ — нечетный элемент цепочки (9.5),} \\ x_{ij}^{(k)} - \theta_k, & \text{если } c_{ij}^{(k)} \text{ — четный элемент цепочки (9.5).} \end{cases} \quad (9.6)$$

Определение параметра  $\theta_k$ , участвующего в формуле (9.6), производится из соотношений

$$\theta_k = \min \{ \theta'_k, \theta''_k, \delta_{\lambda_1}^{(k)}, \delta_{\mu_s}^{(k)} \}, \quad (9.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta'_k &= \min_{2 \leq t \leq s} x_{\lambda_t \mu_{t-1}}, & \theta''_k &= \min_{1 \leq t \leq s} (d_{\lambda_t \mu_t} - x_{\lambda_t \mu_t}), \\ \delta_{\lambda_1}^{(k)} &= a_{\lambda_1} - \sum_{j=1}^n x_{\lambda_1 j}^{(k)}, & \delta_{\mu_s}^{(k)} &= b_{\mu_s} - \sum_{i=1}^m x_{i \mu_s}^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Если суммарная невязка

$$\Delta_{k+1} = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} = 0,$$

матрица  $X_{k+1}$  является решением задачи  $T_d$ .

Если же

$$\Delta_{k+1} > 0,$$

то необходимо начать новую,  $(k+2)$ -ю итерацию.

Этап 3. Допустим, что этап 1 привел к выделению всех  $X_k$ -неполных нулей матрицы  $C_k$ , причем среди ее невыделенных элементов имеются положительные либо среди дважды выделенных — отрицательные (исход 1В). В таком случае необходимо перейти к этапу 3, на котором осуществляется обновление матрицы  $C_k$ .



Рис. 5.3. Блок-схема алгоритма венгерского метода для задачи типа  $T_d$ .

Пусть

$$h = \min \{h', h''\},$$

причем  $h'$  — минимальный среди невыделенных положительных элементов матрицы  $C_k$ , а  $h''$  — минимальный среди дважды выделенных отрицательных элементов  $C_k$ , взятых с обратным знаком.

Вычитаем  $h$  из элементов матрицы  $C_k$ , расположенных в невыделенных строках, и прибавляем это число к элементам  $C_k$ , лежащим в выделенных столбцах. Получаем матрицу  $C_k^{(1)}$ . Если дважды выделенный отрицательный элемент матрицы  $C_k$  перешел в нуль матрицы  $C_k^{(1)}$ , то столбец, содержащий этот элемент, перестает быть выделенным (знак выделения, стоящий над ним, уничтожается), а сам элемент отмечается звездой. Остальные знаки выделения, а также все отметки нулей переносятся с матрицы  $C_k$  на матрицу  $C_k^{(1)}$ .

После проведения этапа 3 переходим к этапу 1, заменив  $C_k$  матрицей  $C_k^{(1)}$ . Если этап 1 снова завершится исходом 1В, то опять возвращаемся к этапу 3. Циклы, состоящие из этапов 3, 1, проводятся до тех пор, пока, наконец, последний из этапов 1 (скажем,  $(p+1)$ -й этап) завершится исходом 1А или 1С. При исходе 1А проводится этап 2, который и завершает  $(k+1)$ -ю итерацию. В зависимости от суммарной невязки  $\Delta_{k+1}$  мы либо продолжаем процесс решения, отправляясь от матриц  $C_{k+1} = C_k^{(p)}$  и  $X_{k+1}$ , либо убеждаемся в том, что  $X_{k+1}$  — оптимальный план ( $\Delta_{k+1} = 0$ ).

Исход 1С указывает на неразрешимость задачи  $T_d$  из-за несовместности ее условий; процесс решения в этом случае, естественно, прекращается. Блок-схема описанного алгоритма изображена на рис. 5.3.

## § 10. Обоснование алгоритма для задачи $T_d$

10.1. Займемся обоснованием приведенного метода решения задачи  $T_d$ .

На предварительном этапе строится матрица  $X_0$ , элементы которой, очевидно, удовлетворяют

УСЛОВИЯМ

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(0)} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (10.1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(0)} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.2)$$

$$0 \leq x_{ij}^{(0)} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.3)$$

Этап 1 отличается от того же этапа при решении задачи  $T$  только тем, что выделению штрихом подлежат не все нули матрицы  $C_k$ , а лишь  $X_k$ -неполные нули. Это изменение сделано для того, чтобы иметь возможность увеличивать элементы матрицы  $X_k$ , отвечающие нулям со штрихом матрицы  $C_k$ , не нарушая при этом условий (10.3).

Этап 2. Обоснование построения цепочки (9.5) проводится точно так же, как и для задачи  $T$ , и поэтому может быть опущено.

В соответствии с формулами (9.6)—(9.8) элементы  $X_k$ , отвечающие нулям со звездой цепочки (9.5), в процессе построения матрицы  $X_{k+1}$  уменьшаются на  $\theta_k$ ; элементы  $X_k$ , соответствующие нулям со штрихом цепочки (9.5), увеличиваются на ту же величину, причем значение параметра  $\theta_k$  не превосходит наименьшего из уменьшаемых элементов  $x_{ij}^{(k)}$  и минимального уклонения увеличиваемых элементов матрицы  $X_k$  от значений пропускных способностей  $d_{ij}$  соответствующих коммуникаций. Следовательно, если элементы матрицы  $X_k$  удовлетворяли неравенствам (10.3), то эти ограничения останутся верными и для элементов матрицы  $X_{k+1}$ .

Рассуждения, приведенные при обосновании этапа 2 для задачи  $T$ , показывают, что

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}, & \text{если } i \neq \lambda_1, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} + \theta_k & \text{при } i = \lambda_1, \end{cases} \quad (10.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)}, & \text{если } j \neq \mu_s, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} + \theta_k & \text{при } j = \mu_s. \end{cases} \quad (10.5)$$

Учитывая неравенство

$$\theta_k \leq \min \{\delta_{\lambda_1}^{(k)}, \delta_{\mu_s}^{(k)}\}$$

и соотношения (10.4), (10.5), получаем, что матрица  $X_{k+1}$  удовлетворяет ограничениям (10.1) и (10.2), если тем же условиям удовлетворяли элементы матрицы  $X_k$ . Поскольку матрица  $X_0$  по построению подчиняется требованиям (10.1) — (10.3), приходим к выводу, что элементы матрицы  $X_{k+1}$  также удовлетворяют системе неравенств (10.1) — (10.3). В соответствии с равенствами (10.4) и (10.5)

$$\Delta_{k+1} = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} = \Delta_k - 2\theta_k. \quad (10.6)$$

Заметим, что  $x_{\lambda_t \mu_{t-1}} > 0$  при  $1 \leq t \leq s$ , так как  $c_{\lambda_t \mu_{t-1}}^{(k)}$  — нуль со звездочкой цепочки (9.5) (см. правило отметки звездой в этапах 1 и 3);  $d_{\lambda_t \mu_t} - x_{\lambda_t \mu_t} > 0$  при  $1 \leq t \leq s$ , так как  $c_{\lambda_t \mu_t}^{(k)}$  — нуль со штрихом цепочки (9.5) (см. правило отметки штрихом в этапе 1).

Далее, согласно условию начала этапа 2  $\delta_{\lambda_1}^{(k)} > 0$ , невязка  $\delta_{\mu_s}^{(k)}$  также положительна, так как по условию обрыва цепочки (9.5) в столбце  $\mu_s$  нет нулей со звездой, и, следовательно, этот столбец не выделялся. Поэтому параметр  $\theta_k > 0$ , и в соответствии с равенством (10.6)

$$\Delta_{k+1} < \Delta_k.$$

Итак, этап 2 приводит к матрице  $X_{k+1}$ , удовлетворяющей условиям (10.1) — (10.3), суммарная невязка  $\Delta_{k+1}$  которой строго меньше суммарной невязки  $\Delta_k$  матрицы  $X_k$ .

**10.2. Этап 3.** В соответствии с правилом перехода от  $C_k$  к  $C_k^{(1)}$  дважды выделенные элементы матрицы  $C_k$  увеличиваются на  $h > 0$ , невыделенные элементы этой матрицы уменьшаются на  $h$ , остальные элементы  $C_k$  сохраняют прежние значения; при этом  $C_k^{(1)} \sim C_k$ . Покажем, что

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(k+1)} &= 0, & \text{если } c_{ij}^{(k+1)} > 0, \\ x_{ij}^{(k+1)} &= d_{ij}, & \text{если } c_{ij}^{(k+1)} < 0. \end{aligned}$$

При  $k = -1$  наше утверждение верно, так как, согласно правилам предварительного этапа,

$$c_{ij}^{(0)} \geq 0 \quad \text{для всех } i \text{ и } j,$$

причем  $x_{ij}^{(0)} > 0$  только в случае  $c_{ij}^{(0)} = 0$ .

Проверим, что приведенное утверждение остается верным при увеличении индекса  $k$  на единицу. Пусть элемент  $c_{ij}^{(k, 1)}$  матрицы  $C_k^{(1)}$  положителен. Тогда, согласно правилу вычисления параметра  $h$ , элемент  $c_{ij}^{(k)} \geq 0$ . Если  $c_{ij}^{(k)} > 0$ , то, по предположению индукции,  $x_{ij}^{(k)} = 0$ . Если же  $c_{ij}^{(k)} = 0$ , то элемент  $c_{ij}^{(k, 1)} = c_{ij}^{(k)} + h$  и, следовательно, расположен на пересечении выделенной строки и выделенного столбца. Но это возможно только при условии  $x_{ij}^{(k)} = 0$  (иначе  $j$ -й столбец перестал бы быть выделенным). Таким образом, из положительности  $c_{ij}^{(k, 1)}$  вытекает, что

$$x_{ij}^{(k)} = 0. \quad (10.7)$$

Используя доказанный факт и аналогичные рассуждения, проверяем, что условие

$$c_{ij}^{(k, l)} > 0 \quad \text{при } l = 2, 3, \dots, p$$

также влечет за собой равенство (10.7). Итак, если

$$c_{ij}^{(k, p)} = c_{ij}^{(k+1)} > 0, \quad (10.8)$$

то справедливо равенство (10.7).

При переходе к  $X_{k+1}$  изменяются лишь те элементы  $X_k$ , которым отвечают  $c_{ij}^{(k, p)} = 0$ . Поэтому из условия (10.8) вытекает равенство

$$x_{ij}^{(k+1)} = x_{ij}^{(k)} = 0.$$

Пусть теперь элемент  $c_{ij}^{(k, 1)}$  матрицы  $C_k^{(1)}$  отрицателен. В силу правила определения параметра  $h$

$$c_{ij}^{(k)} \leq 0.$$

Если  $c_{ij}^{(k)} < 0$ , то, по предположению индукции,  $x_{ij}^{(k)} = d_{ij}$ . Если же  $c_{ij}^{(k)} = 0$ , то этот элемент не является выделен-

ным, так как при переходе к матрице  $C_k^{(1)}$  он уменьшился. Следовательно,  $c_{ij}^{(k)} - X_k$ -полный элемент, т. е.

$$x_{ij}^{(k)} = d_{ij}. \quad (10.9)$$

Таким образом, отрицательность элемента  $c_{ij}^{(k, 1)}$  влечет за собой равенство (10.9). Аналогично проверяем, что неравенство

$$c_{ij}^{(k, p)} = c_{ij}^{(k+1)} < 0 \quad (10.10)$$

также приводит к равенству (10.9). Поскольку при условии (10.10)

$$x_{ij}^{(k)} = x_{ij}^{(k+1)},$$

приходим к выводу, что это условие приводит к равенству

$$x_{ij}^{(k+1)} = d_{ij}.$$

Итак, наше утверждение действительно справедливо при любом значении параметра  $k$ . Попутно установлено, что условия (10.8), (10.10) влекут за собой равенства (10.7) и (10.9) соответственно.

Рассмотрим положительные невыделенные и отрицательные дважды выделенные элементы матрицы  $C_k$  (множество этих элементов не пусто, так как этап 1 завершился исходом 1В). Хотя бы один из этих элементов, скажем  $c_{ij}^{(k)}$ , превратится в нуль при переходе к матрице  $C_k^{(1)}$ .

Если  $c_{ij}^{(k)} > 0$ , то  $x_{ij}^{(k)} = 0$  и, следовательно, в матрице  $C_k^{(1)}$  образуется невыделенный  $X_k$ -неполный нуль. На последующем этапе 1 этот нуль должен быть выделен. Число выделенных строк увеличивается по крайней мере на единицу. Если  $c_{ij}^{(k)} < 0$ , то  $x_{ij}^{(k)} = d_{ij} > 0$ . Поэтому  $j$ -й столбец матрицы  $C_k^{(1)}$  перестает быть выделенным. Таким образом, на каждом из этапов 3 либо увеличивается число выделенных строк, либо сокращается число выделенных столбцов.

Согласно правилам этапа 1, выделенные строки имеют нулевые невязки матрицы  $X_k$ . Допустим, что все строки с нулевыми невязками выделены, выделенные столбцы

отсутствуют. Если при этом не получен исход 1С, то после проведения этапа 3 все вновь образованные  $X_k$ -неполные нули лежат в строках с положительными значениями невязок (такие строки существуют, так как  $\Delta_k > 0$ ). Последующий этап 1 состоит из одного шага и завершается исходом 1А.

Следовательно, через конечное число  $p$  этапов 3 очередной этап 1 завершится либо исходом 1А, либо исходом 1С.

В первом случае проводится этап 2, которым и заканчивается  $(k+1)$ -я итерация.

Покажем, что при исходе 1С задача неразрешима. Пусть  $E_1(E_2)$  — множество выделенных (невыведенных) позиций матрицы  $C_{k+1}$ .

Если  $X$  — произвольная матрица, элементы которой удовлетворяют неравенствам (10.1) — (10.3), то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} &= \sum_{(i,j) \in E_1} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_2} x_{ij} \leq \\ &\leq \sum_{\mu=1}^t \sum_{i=1}^m x_{i\mu} + \sum_{\lambda=1}^r \sum_{j=1}^n x_{\lambda j} + \sum_{(i,j) \in E_2} d_{ij} \leq \\ &\leq \sum_{\mu=1}^t b_{j\mu} + \sum_{\lambda=1}^r a_{i\lambda} + \sum_{(i,j) \in E_2} d_{ij}, \quad (10.11) \end{aligned}$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_r$  — номера выделенных строк матрицы  $C_{k+1}$ ;  $j_1, j_2, \dots, j_t$  — номера выделенных столбцов  $C_{k+1}$ . Если  $c_{ij}^{(k+1)}$  — дважды выделенный элемент  $C_{k+1}$ , то  $c_{ij}^{(k+1)} \geq 0$  (условие исхода 1С).

Покажем, что  $x_{ij}^{(k)} = 0$ . Действительно, для  $c_{ij}^{(k+1)} > 0$  это уже установлено, а для  $c_{ij}^{(k+1)} = 0$  следует из правил этапа 1. Итак, дважды выделенному элементу матрицы  $C_{k+1}$  отвечает нулевой элемент матрицы  $X_k$ . Следовательно,

$$\sum_{(i,j) \in E_1} x_{ij}^{(k)} = \sum_{\mu=1}^t \sum_{i=1}^m x_{i\mu}^{(k)} + \sum_{\lambda=1}^r \sum_{j=1}^n x_{\lambda j}^{(k)} = \sum_{\mu=1}^t b_{j\mu} + \sum_{\lambda=1}^r a_{i\lambda}. \quad (10.12)$$

Если  $c_{ij}^{(k+1)}$  — невыделенный элемент  $C_{k+1}$ , то  $c_{ij}^{(k+1)} \leq 0$  (условие исхода 1С).

При  $c_{ij}^{(k+1)} < 0$ , как было показано,  $x_{ij}^{(k)} = d_{ij}$ .

Поскольку этап 1 закончился выделением всех  $X_k$ -неполных нулей, то равенство  $c_{ij}^{(k+1)} = 0$  возможно только при  $x_{ij}^{(k)} = d_{ij}$ . Итак, невыделенным элементам матрицы  $C_{k+1}$  отвечают элементы матрицы  $X_k$ , равные своим предельным значениям  $d_{ij}$ . Следовательно,

$$\sum_{(i, j) \in E_2} x_{ij}^{(k)} = \sum_{(i, j) \in E_2} d_{ij}. \quad (10.13)$$

Соотношения (10.11)–(10.13) приводят к неравенству

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}. \quad (10.14)$$

По условию

$$\Delta_k = 2 \left( \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} \right) > 0,$$

и в соответствии с (10.14)

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} < \sum_{i=1}^m a_i, \quad (10.15)$$

где  $X = \|x_{ij}\|_{m, n}$  — любая матрица, удовлетворяющая условиям (10.1)–(10.3).

Неравенство (10.15) указывает на несовместность условий (9.2)–(9.4) задачи  $T_d$ , так как для любого плана задачи  $T_d$  оно должно было бы перейти в равенство.

Предположим, что объемы производства  $a_i$ , объемы потребления  $b_j$  и пропускные способности коммуникаций  $d_{ij}$  — целые числа. В этом случае параметр  $\theta_k$  также является целым числом и, следовательно,

$$\theta_k \geq 1.$$

Из полученного неравенства и соотношения (10.6) вытекает, что каждая итерация метода понижает значение суммарной невязки по крайней мере на 2. Поэтому процесс решения не может содержать более чем  $\Delta_0/2$  итераций.

Итак, через конечное число итераций либо будет получен исход 1С при положительной суммарной невязке, либо суммарная невязка станет равной нулю. В первом

случае, как было только что показано, задача  $I_d$  неразрешима.

Чтобы закончить обоснование алгоритма, осталось проверить, что при

$$\Delta_{k+1} = 0 \quad (10.16)$$

матрица  $X_{k+1}$  является решением задачи  $T_d$ . Из условий (10.1) — (10.3), которым удовлетворяет матрица  $X_{k+1}$ , и равенства (10.16) вытекает, что эта матрица является планом задачи  $T_d$ . Согласно правилам этапа 3

$$C_{k+1} \sim C,$$

т. е.

$$c_{ij}^{(k+1)} = c_{ij} - (v_j - u_i) \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

По доказанному ранее из неравенства

$$c_{ij}^{(k+1)} > 0 \quad (c_{ij}^{(k+1)} < 0)$$

вытекает равенство

$$x_{ij}^{(k+1)} = 0 \quad (x_{ij}^{(k+1)} = d_{ij}).$$

Следовательно, по критерию оптимальности плана задачи  $T_d$  числа  $u_i$ ,  $v_j$  — разрешающие множители задачи  $T_d$ , а план  $X_{k+1}$  — ее решение.

## § 11. Пример

Решим с помощью венгерского метода задачу  $T_d$ , рассмотренную в § 9 гл. 4. Задача определяется матрицей транспортных издержек

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

вектором производства — потребления

$$P = (6, 3, 3; 4, 2, 4, 2)$$

и матрицей пропускных способностей коммуникаций

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подготовительный этап. а) Составляется матрица  $C_0$ :

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow C' = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = C'' = C_0.$$

б) Строится матрица  $X_0$ :

$$X_0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix}, \quad \Delta_0 = 10.$$


---


$$\begin{matrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

Матрица  $X_0$  заполняется по столбцам. В первом столбце ненулевым элементом может быть лишь

$$x_{11}^{(0)} = \min(a_1, b_1, d_{11}) = d_{11} = 3,$$

во втором  $x_{22}^{(0)} = d_{22} = 1$ , в третьем  $x_{33}^{(0)} = d_{33} = 1$  и в четвертом  $x_{24}^{(0)} = \min(a_2 - x_{22}^{(0)}, b_4, d_{24}) = 2$ .

Во втором столбце справа от  $X_0$  выписаны значения невязок для пунктов производства; во второй строке ниже  $X_0$  записаны величины невязок для пунктов потребления.

Условимся отмечать одной точкой сверху  $X_k$ -несущественные нули матриц  $C_k^{(s)}$ , а двумя точками  $X_k$ -полные нули этих матриц. Строки матриц  $C_k^{(s)}$ , которым отвечают положительные невязки матрицы  $X_k$ , отмечаются значками «X», стоящими слева от соответствующих строк.

Итерация I.

$$C_0 = \begin{matrix} & & + \\ \times & \begin{vmatrix} \ddot{0} & 3 & 1 & 4 \\ 1 & \ddot{0} & 3 & \ddot{0} \\ 2 & 1 & \ddot{0} & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{h=1} C_0^{(1)} = \begin{matrix} & & + \\ \times & \begin{vmatrix} -1 & 2 & \dot{0} & 4 \\ \dot{0} & -1 & 2 & \ddot{0} \\ 1 & \dot{0} & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} = C_1,$$

$$X_0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \xrightarrow{\theta_1=1} X_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad \Delta_1 = 8.$$


---


$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$$

Итерация I складывается из этапов 1, 3, 1 и 2. Предварительно выделяется столбец 4. Первый этап 1 не содержит ни одного шага, так как после выделения столбца 4 матрица  $C_0$  не содержит  $X_0$ -неполных невыделенных нулей. Далее следует этап 3 при  $h=1$ . Второй этап 1 состоит из одного шага и заканчивается исходом 1А. Цепочка, построенная на этапе 2, содержит всего один элемент  $0'_{32}$ . Матрица  $X_1$  отличается от  $X_0$  только одним элементом  $x_{32}^{(1)} = x_{32}^{(0)} + \theta_1 = 1$ .

Итерация II.

$$C_1 = \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & \dot{0} & 4 \\ & \dot{0} & -1 & 2 \\ & & \ddot{0} & -1 \\ & & & 2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} + \\ + \end{array} = C_2,$$

$$X_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\theta_1=2} X_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}, \quad \Delta_2 = 4.$$

Итерация II состоит из этапов 1 и 2. Этап 1 содержит один шаг, цепочка этапа 2 снова состоит всего из одного элемента.

Итерация III.

$$C_2 = \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & \ddot{0} & 4 \\ & \dot{0} & -1 & 2 \\ & & \ddot{0} & * \\ & & & 2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} + \\ \oplus \end{array} + \xrightarrow{h=1} C_2^{(1)} =$$

$$= \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} -2 & 2 & -1 & 3 \\ & \dot{0} & \ddot{0} & 2 \\ & & \dot{0} & \ddot{0} \\ & & & 2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} + \\ + \end{array} = C_3.$$

$$X_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0' & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \xrightarrow{\theta_2=1} X_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}, \quad \Delta_3 = 2.$$

Итерация III состоит из этапа 1, этапа 3 при  $h=1$ , этапа 1 и этапа 2, цепочка которого опять-таки содер-

жит единственный элемент. Остановимся лишь на этапе 3. Минимальный положительный невыделенный элемент  $h'$  матрицы  $C_2$  равен 1. Единственный отрицательный дважды выделенный элемент этой матрицы  $c_{22}^{(2)} = -1$ . Следовательно,  $h'' = 1$ ,

$$h = \min(1, 1) = 1.$$

После составления матрицы  $C_2^{(1)}$  знак выделения над столбцом 2 уничтожается, так как на пересечении его с выделенной строкой 2 стоит вновь образованный нуль, который отмечается звездой.

Итерация IV.

$$C_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & + & & + \\ x & \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \end{array} \xrightarrow{h=2} C_3^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & \oplus & & \oplus \\ x & \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0^* & 0' & 0^* \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \end{array} + \rightarrow$$

$$\xrightarrow{h=1} C_3^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \oplus & & \\ x & \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0^* & 0' & 0^* \\ 0^* & -1 & -5 & 0' \end{vmatrix} \end{array} \end{array} + \xrightarrow{h=1} C_3^{(3)} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & \begin{vmatrix} -3 & 0' & -5 & 1 \\ 1 & 0^* & 0' & 0^* \\ 0^* & -1 & -5 & 0' \end{vmatrix} \end{array} \end{array} + ,$$

$$X_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \xrightarrow{\theta_4=1} X_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array},$$

$$\Delta_4 = 0. \quad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Итерация IV складывается из этапов 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1 и 2. Предварительно выделяем столбцы 1, 2 и 4. Сразу же имеет место исход 1В; переходим к  $C_3^{(1)}$  при  $h=2$ . Второй этап 1 состоит из одного шага: выделяется строка 2,  $0_{23}$  отмечается штрихом, уничтожаются знаки выделения над столбцами 2 и 4,  $0_{22}$  и  $0_{24}$  отмечаются звездами. Снова имеет место исход 1В, переходим к матрице  $C_3^{(2)}$  при  $h=1$ . Следующий этап 1 также содержит один шаг и оканчивается исходом 1В. Проведя далее этап 3 при  $h=1$  и этап 1, состоящий из одного шага, получаем исход 1А и обращаемся к завершающему этапу 2.

В отличие от предыдущих итераций цепочка этапа 2 состоит из трех элементов:  $0'_{12}$ ,  $0^*_{22}$ ,  $0'_{23}$ .

Для получения матрицы  $X_4$  уменьшаем  $x_{22}^{(3)}$  на  $\theta_3 = 1$  и увеличиваем на 1 элементы  $x_{12}^{(3)}$ ,  $x_{23}^{(3)}$ . Поскольку  $\Delta_4 = 0$ , матрица  $X_4$  является искомым решением задачи.

## § 12. Построение исходного плана задачи $T_d$

12.1. Как уже отмечалось в § 4, между двумя соседними этапами 3 венгерского метода решается вспомогательная задача, состоящая в построении оптимального набора допустимых перевозок по некоторой фиксированной системе коммуникаций, при котором перевозится наибольший суммарный объем продукции. Поэтому этапы 1 и 2 венгерского метода могут быть использованы для отыскания исходного плана задачи  $T_d$  или выяснения ее неразрешимости. Действительно, если считать фиксированными все коммуникации задачи, то оптимальный набор допустимых перевозок либо совпадает с искомым планом (суммарный объем транспортируемой продукции равен суммарному объему потребления), либо дает основание сделать вывод о неразрешимости задачи (суммарный объем перевозимой продукции меньше суммарного объема потребления).

Алгоритм построения плана задачи  $T_d$  состоит из предварительного этапа и ряда итераций. Каждая итерация, кроме, быть может, последней, складывается из этапов 1 и 2.

Предварительный этап служит для построения исходного набора допустимых перевозок, т. е. матрицы  $X_0 = \|x_{ij}^{(0)}\|$ , элементы которой удовлетворяют системе неравенств (10.1)–(10.3). Заполнение матрицы  $X_0$  осуществляется по столбцам сверху вниз. Допустим, что первые  $j-1$  столбцов и  $i-1$  верхних позиций  $j$ -го столбца матрицы  $X_0$  уже заполнены. Элемент  $x_{ij}^{(0)}$  рассчитывается согласно формуле

$$x_{ij}^{(0)} = \min \left\{ a_i - \sum_{\lambda=1}^{j-1} x_{i\lambda}^{(0)}, b_j - \sum_{\lambda=1}^{i-1} x_{\lambda j}^{(0)}, d_{ij} \right\}. \quad (12.1)$$

Если суммарная невязка

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(0)}$$

матрицы  $X_0$  равна нулю, то  $X_0$  — искомый план. Если же  $\Delta_0 > 0$ , то переходим к итерации I.

В результате отдельной итерации строится новый набор допустимых перевозок с меньшим значением суммарной невязки по сравнению с предыдущим набором либо выявляется неразрешимость задачи.

Пусть уже проведено  $k$  итераций и на последней,  $k$ -й итерации получена матрица допустимых перевозок  $X_k$ , причем  $\Delta_k > 0$ . Следующая,  $(k+1)$ -я итерация начинается с этапа 1.

Этап 1. Выделяем (значком «+») столбцы матрицы  $X_k$ , невязки которых равны нулю. Другими словами,  $j$ -й столбец матрицы  $X_k$  подлежит выделению, если

$$\delta_{ij}^{(k)} = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} = 0.$$

Выбираем произвольный невыделенный элемент  $x_{ij}^{(k)} < d_{ij}$  и вычисляем невязку  $\delta_i^{(k)}$   $i$ -й строки матрицы  $X_k$ . Возможны два случая:

$$\text{а) } \delta_i^{(k)} = 0; \quad \text{б) } \delta_i^{(k)} > 0.$$

В случае а) отмечаем штрихом  $x_{ij}^{(k)}$ , выделяем  $i$ -ю строку матрицы  $X_k$ , уничтожаем знаки выделения над теми столбцами  $X_k$ , которые содержат положительные элементы в  $i$ -й строке, и каждый такой элемент отмечаем звездой. В случае б) отмечаем штрихом элемент  $x_{ij}^{(k)}$  и переходим к этапу 2.

Как обычно, назовем последовательность операций, связанную с отдельным элементом матрицы  $X_k$ , *шагом* этапа 1. Последовательные шаги этапа 1 проводятся до тех пор, пока либо на каком-то шаге будет обнаружена альтернатива б) (исход 1А), либо все элементы  $x_{\lambda\mu}^{(k)} < d_{\lambda\mu}$  окажутся выделенными (исход 1С).

Если этап 1 завершается исходом 1А, то обращаются к этапу 2. Если же имеет место исход 1С, то  $X_k$  является оптимальным набором допустимых перевозок с положительным значением суммарной невязки  $\Delta_k$ , т. е. задача  $T_d$  не имеет ни одного плана.

Этап 2. Пусть  $x_{\lambda_1\mu_1}^{(k)}$  — элемент, отмеченный штрихом на последнем шаге этапа 1. Отправляясь от  $x_{\lambda_1\mu_1}^{(k)}$ , строим цепочку из отмеченных элементов матрицы  $X_k$ . В столбце  $\mu_1$  выбирается элемент  $x_{\lambda_2\mu_1}^{(k)}$ , отмеченный звездой. Далее в строке  $\lambda_2$  находится элемент  $x_{\lambda_2\mu_2}^{(k)}$ , отмеченный штрихом, и т. д. Двигаясь таким образом от элемента со штрихом к элементу со звездой по столбцу и от элемента со звездой к элементу со штрихом по строке, пока это возможно, формируем цепочку

$$x'_{\lambda_1\mu_1}, x^*_{\lambda_2\mu_1}, \dots, x^*_{\lambda_s\mu_{s-1}}, x'_{\lambda_s\mu_s} \quad (12.2)$$

(для облегчения записи индексы  $k$  над элементами цепочки опущены).

Построение цепочки производится однозначно, все ее элементы различны, последний элемент цепочки обязательно отмечен штрихом. Поскольку  $x'_{\lambda_s\mu_s}$  — последний элемент цепочки, то в  $\mu_s$ -м столбце матрицы  $X_k$  нет элементов со звездой, т. е. этот столбец не выделялся и, следовательно,  $\delta_{\mu_s}^{(k)} > 0$ .

Пусть  $\theta_k$  — наименьшее из четырех чисел:

$$\theta'_k = \min_{1 \leq i \leq s} (d_{\lambda_i \mu_i} - x_{\lambda_i \mu_i}^{(k)}),$$

$$\theta''_k = \min_{1 \leq i \leq s-1} x_{\lambda_{i+1} \mu_i},$$

$$\delta_{\lambda_1}^{(k)} = a_{\lambda_1} - \sum_{j=1}^n x_{\lambda_1 j}^{(k)},$$

$$\delta_{\mu_s}^{(k)} = b_{\mu_s} - \sum_{i=1}^m x_{i \mu_s}^{(k)}.$$

Новый набор допустимых перевозок  $X_{k+1}$  образуется из  $X_k$  путем увеличения нечетных элементов цепочки (12.2) на  $\theta_k$  и уменьшения на это же число ее четных элементов. Таким образом, элементы  $X_{k+1}$  вычисляются по формуле

$$x_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} x_{ij}^{(k)} + \theta_k, & \text{если } i = \lambda_t, j = \mu_t, t = 1, 2, \dots, s, \\ x_{ij}^{(k)} - \theta_k, & \text{если } i = \lambda_t, j = \mu_{t-1}, t = 2, 3, \dots, s, \\ x_{ij}^{(k)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Суммарная невязка  $\Delta_{k+1}$  матрицы  $X_{k+1}$  меньше, чем  $\Delta_k$ . Итерация  $k+1$  закончена.

Итак, на  $(k+1)$ -й итерации либо строится новый набор допустимых перевозок  $X_{k+1}$  с меньшим значением суммарной невязки  $\Delta_{k+1}$ , либо устанавливается отсутствие планов у задачи  $T_d$ . В последнем случае итерация содержит лишь этап 1.

Если  $a_i$ ,  $b_j$  и  $d_{ij}$  — целые числа, то через конечное число  $p$  итераций будет построена матрица  $X_p$  с нулевой суммарной невязкой  $\Delta_p$ , являющаяся планом задачи  $T_d$ , либо обнаружится, что условия (9.2) — (9.4) противоречивы.

Мы не будем останавливаться на обосновании изложенного алгоритма, поскольку это было бы дословным повторением соответствующих рассуждений п. 10.2. Однако для лучшего уяснения сущности венгерского метода читателю будет полезно провести это обоснование самостоятельно.

**12.2.** Приведем численные примеры, иллюстрирующие практическое использование изложенного алгоритма.

1. Требуется найти план перевозок для задачи  $T_d$ , матрица пропускных способностей коммуникаций и объемы производства и потребления которой заданы таблицей

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 4 & 5 & \end{array}$$

На предварительном этапе находим допустимый набор перевозок

$$X_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\Delta_0 = 6 > 0$ ,  $X_0$  не является планом задачи. Переходим к итерации I.

Итерация I.

$$X_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta_1=1} X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\oplus$   $+$   
 $\begin{matrix} 3^* & 0' \\ \curvearrowright & \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0' & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$

$$\Delta_1 = 4.$$

Итерация состоит из этапа 1 и этапа 2. На этапе 1 выделяем столбцы 1 и 3. Затем отмечаем штрихом невыделенный элемент  $x_{12}^{(0)} = 0 < d_{12}$ . Имеет место случай а). Строка 1 выделяется, над элементом  $x_{11}^{(0)} = 3$

ставится звезда, знак выделения над столбцом 1 уничтожается. Далее следует второй шаг этапа 1, связанный с элементом  $x_{31}^{(0)} = 0$ . На этом шаге приходим к случаю б). Этап 1 закончен исходом 1А. Напомним, что значок «X», стоящий слева от строки, указывает на положительность ее невязки. Это обозначение облегчает обнаружение случая б). При выборе очередного невыделенного элемента  $x_{ij} < d_{ij}$  полезно вначале проверить, нет ли таких элементов в строках, снабженных значком «X».

Отдавая предпочтение элементам строк, снабженных значком «X», мы, очевидно, можем сократить число шагов этапа 1. Это замечание использовано в проведенном этапе 1.

На этапе 2 строится цепочка из трех элементов:

$$x_{31}^{(0)}, x_{11}^{(0)}, x_{12}^{(0)},$$

с помощью которой определяется новый набор допустимых перевозок  $X_1$  при  $\theta_1 = 1$ . Поскольку  $\Delta_1 = 4 > 0$ , переходим к итерации II.

Итерация II.

$$X_1 = x \left\| \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & + & \\ 2^* & 1^* & 0 & 0' \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0' & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \xrightarrow{\delta_2=1} X_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$\Delta_2 = 2.$$

Итерация II похожа на предыдущую итерацию и в дополнительных пояснениях не нуждается. Она завершается построением матрицы  $X_2$  с положительной суммарной невязкой  $\Delta_2$ . Необходимо перейти к следующей итерации.

## Итерация III.

$$X_2 = \begin{array}{c} \oplus \quad \oplus \quad \oplus \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1^* & 1^* & 0 & 1' \\ 1' & 2 & 4^* & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| + \begin{array}{c} + \\ + \\ \theta_3 = 1 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| = X_3,$$

$$\Delta_3 = 0.$$

Этап 1 итерации III состоит из трех шагов и завершается исходом 1А.

На этапе 2 строится цепочка из 5 элементов:

$$x_{33}^{(2)}, x_{23}^{(2)}, x_{21}^{(2)}, x_{11}^{(2)}, x_{14}^{(2)},$$

матрица  $X_3$  образуется из  $X_2$  при  $\theta_3 = 1$ . Поскольку  $\Delta_3 = 0$ ,  $X_3$  — искомый план задачи  $T_d$ .

12.3. Решим еще один пример, связанный с отысканием плана перевозок, исходя из таблицы

4	3	1	1	3
2	1	1	2	5
1	1	1	6	7
1	1	2	1	1
5	4	3	4	

Предварительный этап приводит к матрице

$$X_0 = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

с суммарной невязкой  $\Delta_0 = 4$ ,

Итерация I.

$$X_0 = x \left\| \begin{array}{cccc} \oplus & & & \\ 3^* & 0' & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0' & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| + \xrightarrow{\theta_1=1} X_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| ,$$

$$\Delta_1 = 2.$$

Итерация II.

$$X_1 = x \left\| \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & & + \\ 2^* & 1^* & 0' & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0' & 0 \end{array} \right\| +$$

Итерация I не требует пояснений. Что касается итерации II, то ее этап I после двух шагов завершается исходом IC, так как все невыделенные элементы  $X_1$  оказываются равными соответствующим значениям пропускных способностей коммуникаций. Следовательно, задача  $T_d$ , условия которой определяются таблицей рассмотренного примера, не имеет ни одного плана. При этом установлено, что, используя допустимые наборы перевозок, можно транспортировать не более 15 единиц продукции.

## ДРУГИЕ КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

---

В настоящее время разработано довольно много алгоритмов для решения транспортной задачи. Подавляющее большинство из них связано с конечными методами решения общей задачи линейного программирования. Немногочисленные способы анализа задачи  $T$ , основанные на бесконечных итеративных процессах, приводят обычно к большему объему вычислений по сравнению с известными конечными алгоритмами.

Существующие конечные алгоритмы транспортной задачи можно разделить на две группы. Первая группа алгоритмов основана на наиболее популярном методе линейного программирования — методе последовательного улучшения плана. Вторая группа алгоритмов базируется на идеях метода последовательного сокращения невязок.

В главах 4 и 5 подробно изучены представители обеих групп алгоритмов. Как уже отмечалось, типичным представителем первой группы алгоритмов является метод потенциалов, основанный на 2-м алгоритме метода улучшения плана. К нему примыкает распределительный метод, использующий первый алгоритм метода улучшения плана.

Из других алгоритмов первой группы следует выделить компактную схему, разработанную Глейзалом [7]. Краткому описанию метода Глейзала посвящен § 1.

В § 2 приведена краткая характеристика методов решения транспортной задачи, основанных на методе последовательного сокращения невязок, разработанного для общей задачи линейного программирования.

В § 3 приведена схема использования метода последовательного уточнения оценок для решения транспортной задачи.

Конечные методы блочного программирования, описанные в [1], могут быть эффективно использованы для решения задач транспортного типа. В [11] подробно изложен и проиллюстрирован примером конечный метод решения транспортной задачи, предложенный Вильямсом [4] и использующий идею метода разложения Данцига — Вулфа. Методы блочного программирования, полезные сами по себе при решении задач транспортного типа (в частности, и многоиндексных транспортных задач), оказываются особенно эффективными при решении специальных (например, транспортных) задач, «испорченных» дополнительными условиями общего вида (см. [9]). В настоящей главе мы не касаемся этих вопросов и отсылаем читателя к перечисленным источникам.

В последнем параграфе главы (§ 4) приводятся соображения об использовании методов решения транспортных задач с запретами.

## § 1. Метод Глейзала

Метод Глейзала представляет собой одну из реализаций метода последовательного улучшения плана применительно к транспортной задаче.

Вычислительный процесс метода начинается с определения некоторого (не обязательного опорного) плана задачи  $T$  и складывается из конечного числа однотипных итераций.

В результате осуществления  $k$ -й итерации мы либо убеждаемся в оптимальности плана, который построен на предыдущей итерации, либо формируем новый, более экономный план  $X_k$ . В последнем случае переходим к  $(k+1)$ -й итерации, отправляясь от плана  $X_k$  и матрицы  $C_k \sim C$ , полученных на  $k$ -й итерации.

Отдельная итерация алгоритма (и, в частности,  $(k+1)$ -я итерация) разбивается на два этапа.

Этап 1 имеет целью построить матрицу  $C'_k \sim C_k$  и план  $X'_k$ , связанный с не бóльшим значением суммарных транспортных издержек по сравнению с  $X_k$ , такие, что все  $X'_k$ -существенные элементы матрицы  $C'_k$  — нули. Он складывается из нескольких шагов. Содержание

отдельного шага состоит в следующем. Выбираем произвольный  $X_k$ -существенный элемент матрицы  $C_k$ , отличный от нуля. Отправляясь от выбранного элемента, строим последовательность множеств  $G_1, G_2, \dots$  из  $X_k$ -существенных элементов и выделяем соответствующие строки и столбцы матрицы  $C_k$  так, как это делается на этапе 1 метода потенциалов (см. п. 4.2 гл. 4). В отличие от метода потенциалов процесс образования множеств  $G_\lambda$  может завершиться одним из двух исходов: исходом 1А, когда очередное множество семейства  $G_\lambda$  окажется пустым, или исходом 1В, когда некоторая линия (строка или столбец) матрицы  $C_k$  окажется выделенной дважды.

Отметим, что в методе потенциалов исход 1В невозможен вследствие опорности плана  $X_k$ .

При исходе 1А из выделенных линий  $C_k$  последовательно (в порядке выделения) вычитаются некоторые числа так, чтобы все элементы множеств  $G_\lambda$  превратились в нули. Нулевые  $X_k$ -существенные элементы  $C_k$  при этом не изменяются. Поэтому исход 1А приводит к построению матрицы  $C_{k,1} \sim C_k$  с меньшим числом ненулевых  $X_k$ -существенных элементов по сравнению с  $C_k$ .

При исходе 1В выделяется замкнутая цепочка из  $X_k$ -существенных элементов  $C_k$ :

$$c_{\lambda_1 \mu_1}^{(k)}, c_{\lambda_1 \mu_2}^{(k)}, c_{\lambda_2 \mu_2}^{(k)}, \dots, c_{\lambda_{s-1} \mu_{s-1}}^{(k)}, c_{\lambda_{s-1} \mu_1}^{(k)},$$

с помощью которой строится план  $X_{k,1}$ , не худший по сравнению с  $X_k$ , но имеющий меньшее число положительных перевозок. Делается это так. Вычислим

$$L_1 = \sum_{i=1}^{s-1} c_{\lambda_i \mu_i}^{(k)} \quad \text{и} \quad L_2 = \sum_{i=1}^{s-1} c_{\lambda_i \mu_{i+1}}^{(k)} \quad (\mu_s = \mu_1).$$

Если

$$L_1 \leq L_2,$$

то увеличиваем перевозки  $x_{\lambda_i \mu_i}^{(k)}$  и уменьшаем перевозки  $x_{\lambda_i \mu_{i+1}}^{(k)}$  на минимум из уменьшаемых величин. Если же

$$L_1 > L_2,$$

то  $x_{\lambda_i \mu_i}^{(k)}$  уменьшаются, а  $x_{\lambda_i \mu_{i+1}}^{(k)}$  увеличиваются на минимальную из перевозок  $x_{\lambda_i \mu_i}^{(k)}$ .

Следующий шаг проводится в том случае, если не все  $X_{k,1}$  — существенные элементы матрицы  $C_{k,1}$  равны нулю ( $X_{k,1}=X_k$  при исходе 1А и  $C_{k,1}=C_k$  при исходе 1В). Отправной точкой этого шага является пара матриц  $C_{k,1}$ ,  $X_{k,1}$ . Через конечное число шагов этапа 1 получаем искомые матрицы  $C'_k$  и  $X'_k$ .

Этап 2 приводит либо к установлению оптимальности плана  $X'_k$ , либо к построению более экономного плана  $X_{k+1}$ . Этап 2, так же как и этап 1, разбивается на ряд однотипных шагов, описание одного из которых (первого) дается ниже.

Пусть  $\Delta$  — минимальный элемент матрицы  $C'_k$ . Если  $\Delta \geq 0$ , то  $X'_k$  — оптимальный план. В противном случае, исходя из  $\Delta$ , формируется последовательность множеств  $H_\lambda$ , состоящих из элементов матрицы  $C'_k$ . Множество  $H_1$  состоит из единственного элемента  $\Delta$ . Допустим, что множества  $H_\lambda$  при  $\lambda \leq s$  уже построены. Если  $s$  — четное число, то  $H_{s+1}$  состоит из всех тех неположительных элементов  $C'_k$ , в столбцах которых имеются элементы  $H_s$  и которые не входят ни в одно из множеств  $H_\lambda$  при  $2 \leq \lambda \leq s$ . Если  $s$  — нечетное число, то в  $H_{s+1}$  включаются те  $X'_k$ -существенные элементы  $C'_k$ , которые лежат в строках, содержащих элементы  $H_s$ , и не входили ни в одно из ранее построенных множеств.

Процесс построения множеств  $H_\lambda$  завершается либо получением пустого множества (исход 2А), либо включением в очередное множество начального элемента  $\Delta$  (исход 2В). При исходе 2А преобразуется матрица  $C'_k$ . Для этого выделяются ее строки и столбцы, содержащие элементы множеств  $H_\lambda$  (кроме столбца элемента  $\Delta$ ) и вычисляется параметр  $h$  — минимум среди элементов  $C'_k$ , лежащих в выделенных столбцах и не принадлежащих ни одному из множеств  $H_\lambda$ .

Прибавляя  $h$  к элементам выделенных строк и вычитая это число из элементов выделенных столбцов, приходим к матрице  $C'_{k,1} \sim C'_k$ .

При этом преобразовании  $X'_k$ -существенные элементы остаются нулями, неотрицательные элементы — неотри-

цательными, отрицательные элементы не убывают и по крайней мере один из них ( $\Delta$ ) увеличивается на  $h$ .

При исходе 2В из элементов множеств  $H_\lambda$  строится цепочка, замыкающаяся на  $\Delta$ . Нечетными элементами цепочки являются  $X'_k$ -существенные элементы  $C'_k$ , четными — неположительные элементы  $C'_k$ . Увеличивая на  $\theta$  перевозки плана  $X'_k$ , соответствующие четным элементам цепочки, и уменьшая на ту же величину перевозки, отвечающие ее нечетным элементам, получаем новый план  $X_{k+1}$ , более экономный по сравнению с  $X'_k$ . Здесь по определению  $\theta$  — минимальная из уменьшаемых перевозок.

Описанный шаг напоминает второй этап метода потенциалов. Отличие состоит в том, что, во-первых, в методе потенциалов исход 2А невозможен, а во-вторых, цепочка, строящаяся в методе потенциалов, состоит только из  $X'_k$ -существенных элементов.

Через конечное число шагов этапа 2 строится матрица  $C'_{k,l} \sim C'_k$ , не содержащая отрицательных элементов, либо очередной шаг завершается исходом 2В.

В первом случае  $(k+1)$ -я итерация является последней, так как план  $X'_k$  оптимален. Во втором случае, получив новый, более экономный план  $X_{k+1}$ , переходим к  $(k+2)$ -й итерации, приняв за  $C_{k+1}$  последнюю из построенных матриц, эквивалентных  $C'_k$ . Конечность алгоритма гарантируется в случае, если все  $a_i$  и  $b_j$  — рациональные числа.

Алгоритм Глейзала одинаково применим как к невырожденным, так и к вырожденным задачам  $T$ . В этом отношении он имеет преимущество по сравнению с методом потенциалов. Однако, как, вероятно, подметил читатель, логическая структура алгоритма Глейзала сложнее структуры метода потенциалов.

## § 2. Об алгоритмах решения транспортной задачи, связанных с методом сокращения невязок

Типичным представителем второй группы алгоритмов является венгерский метод. В гл. 5 был описан алгоритм венгерского метода, принадлежащий Манкресу [30].

Еще один алгоритм венгерского метода был предложен в работах Форда и Фулкерсона [42], [45]. Известны и другие реализации венгерского метода. Небольшие особенности, отличающие один алгоритм от другого, имеются лишь на этапе решения вспомогательной задачи. Эти особенности содержатся в процессе формирования цепочек, необходимых для получения системы допустимых перевозок с меньшим значением суммарной невязки, который либо приводит к построению искомой цепочки, либо указывает на отсутствие таких цепочек. Сравнительный анализ нескольких алгоритмов венгерского метода, основанный на некоторой графической интерпретации процесса формирования цепочек, содержится в интересной работе Куна [24].

Ко второй группе алгоритмов относится также метод условно оптимальных планов, разработанный А. Л. Лурье и Ю. А. Олейником [27 и 35], и метод вычеркивающей нумерации, принадлежащий А. Л. Брудно [3]. Особенность последнего алгоритма состоит в специальном способе выделения допустимых коммуникаций, определяющих очередную вспомогательную задачу. На каждом этапе решения допустимым коммуникациям отвечает система линейно независимых векторов условий  $P_{ij}$ . Это позволяет сразу получать решение вспомогательной задачи, но одновременно увеличивает число таких задач. В настоящее время не существует достаточно корректно проведенной численной оценки известных алгоритмов второй группы. Однако следует полагать, что в среднем большинство из них обладает одинаковой эффективностью. Тем не менее учет логической структуры ЦВМ при выборе алгоритма решения транспортной задачи может уменьшить время, необходимое для вычислений.

### **§ 3. Схема решения транспортной задачи, основанная на методе уточнения оценок**

Конечные методы линейного программирования могут быть, как известно, разделены на три группы, представителями которых являются метод последовательного улучшения плана, метод последовательного сокращения невязок и метод последовательного уточнения оценок.

Предельная простота условий транспортной задачи позволяет на основе любого из общих методов линейного программирования получить значительно менее трудоемкий специальный алгоритм для анализа этой задачи. Эффективность алгоритма зависит в основном от того, насколько полно учтена специфика задачи. Как уже отмечалось, конечные методы линейного программирования первых двух групп являются основой всех существующих конечных алгоритмов транспортной задачи. Идеи, на которых базируются общие методы третьей группы, до сих пор не привлекались для исследования транспортных задач. Однако это ни в коей мере не означает, что метод последовательного уточнения оценок не пригоден для задач типа  $T$ . Напротив, подобно другим методам он может быть приспособлен для этих задач, причем каждая итерация полученного алгоритма будет не более трудоемкой, чем в методе потенциалов.

Наметим общую схему алгоритма транспортной задачи, основанного на втором алгоритме метода последовательного уточнения оценок. Будем в дальнейшем называть его двойственным методом потенциалов или кратко двойственным методом. Движение к оптимальному плану здесь осуществляется по псевдопланам задачи. Напомним это понятие применительно к задаче  $T$ .

Матрица  $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$  является псевдопланом задачи  $T$ , если выполнены условия:

$$1) \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

2) невозможно составить замкнутую цепочку из ненулевых элементов матрицы  $X$ ;

3) величины  $u_i, v_j$ , полученные в результате решения системы уравнений

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad x_{ij} \in G_X, \quad (3.1)$$

где  $G_X$  — множество ненулевых элементов  $X$ , составляют план двойственной задачи  $T^*$ , т. е.

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i) \geq 0 \quad \text{для всех } i \text{ и } j.$$

Таким образом, псевдоплан является двойственным аналогом опорного плана. Определение псевдоплана отличается от определения опорного плана условием 3), которое заменило требование  $x_{ij} \geq 0$ . С каждым псевдопланом  $X$  задачи  $T$  связан некоторый план задачи  $\bar{T}$ , и следовательно, ему соответствует определенное значение линейной формы задачи  $\bar{T}$ :

$$\tilde{L}_X = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i,$$

где  $v_j, u_i$  вычисляются из уравнений (3.1).

Двойственный метод состоит из конечного числа итераций, на каждой из которых осуществляется переход к новому псевдоплану, связанному с большим значением линейной формы задачи  $\bar{T}$  (для краткости мы рассматриваем лишь случай невырожденной задачи  $\bar{T}$ ).

Опишем сущность отдельной итерации. Пусть в результате предыдущей итерации получен псевдоплан  $X$  и отвечающая ему матрица  $\Delta = \|\Delta_{ij}\|_{m,n}$ . Если все компоненты  $X$  — неотрицательные числа, то этот псевдоплан является планом и, следовательно, решением задачи  $T$ . Если же среди его составляющих имеются отрицательные, переходим к построению нового псевдоплана  $X'$  и матрицы  $\Delta'$ . Выбираем одну из отрицательных составляющих псевдоплана  $X$ , скажем,  $x_{i_0 j_0} < 0$ . Далее находим числа  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ , решив следующую систему уравнений:

$$\beta_j - \alpha_i = e_{ij}, \quad \text{если } x_{ij} \neq 0, \quad (3.2)$$

где все  $e_{ij}$  равны нулю, кроме  $e_{i_0 j_0} = 1$ . Величины  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  вычисляются по тем же правилам, что и предварительные потенциалы в методе потенциалов, так как системы (3.1) и (3.2) различаются только правыми частями. Облегчающим обстоятельством здесь является то, что  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  могут принимать лишь два значения: 0 или 1 ( $\alpha_i$  полагается равным нулю). По найденным числам  $\alpha_i, \beta_j$  составляем величины

$$\delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i$$

и отмечаем те позиции  $(i, j)$ , которым отвечает  $\delta_{ij} < 0$  (т. е.  $\delta_{ij} = -1$ ). Затем разыскиваем минимум среди элементов  $\Delta_{ij}$ , расположенных в отмеченных позициях  $(i, j)$ .

В невырожденном случае минимум достигается на единственном элементе, скажем, на  $\Delta_{rt} > 0$ . Позиция  $(r, t)$  определяет новый ненулевой элемент псевдоплана  $X'$ . Для перехода к псевдоплану  $X'$  строим цепочку из ненулевых элементов  $X$ , замыкающуюся на элементе  $x_{rt}$  по тем же правилам, которые используются в методе потенциалов. В эту цепочку обязательно войдет  $x_{i_0 j_0}$  ( $x_{i_0 j_0}$  будет четным элементом цепочки). Псевдоплан  $X'$  образуется из  $X$  согласно следующему правилу.

Вычитаем  $x_{i_0 j_0}$  из четных элементов цепочки и  $x_{rt} = 0$ , прибавляем  $x_{i_0 j_0}$  к нечетным элементам цепочки и сохраняем прежние значения для остальных элементов. Очевидно,

$$x'_{rt} = -x_{i_0 j_0} > 0, \quad x'_{i_0 j_0} = 0.$$

При переходе к псевдоплану  $X'$  значение линейной формы задачи  $T$  возрастает на величину

$$\tilde{L}_{X'} - \tilde{L}_X = -x_{i_0 j_0} \Delta_{rt}. \quad (3.3)$$

Элементы  $\Delta'_{ij}$  матрицы  $\Delta'$ , связанной с планом  $X'$ , рассчитываются по рекуррентной формуле

$$\Delta'_{ij} = \Delta_{ij} + \Delta_{rt} (\beta_j - \alpha_i). \quad (3.4)$$

Следующая итерация проводится, отправляясь от матриц  $X'$  и  $\Delta'$ . Через конечное число итераций получаем решение задачи.

В вырожденном случае, когда минимум чисел  $\Delta_{ij}$ , расположенных в выделенных позициях, достигается на нескольких элементах, в качестве  $\Delta_{rt}$  можно принять любой из них. Это правило теоретически не исключает возможности возвращения к старому псевдоплану. Однако в практических задачах заикливание — является крайне редкое. Отметим также, что в вырожденном случае роль ненулевых переменных псевдоплана играют так называемые базисные элементы, некоторые из которых могут быть нулями.

Мы остановились здесь на сущности одного из алгоритмов задачи  $T$ , относящихся к третьей группе. Можно было бы сформулировать и другие алгоритмы этой группы. Например, построить двойственный аналог метода

Глейзала, который не требует разделения задач  $T$  на вырожденные и невырожденные.

Алгоритмы задачи  $T$ , относящиеся к третьей группе, могут найти применение при анализе транспортных задач, объемы производства и потребления которых линейно зависят от одного параметра.

#### § 4. О методах анализа транспортной задачи с запретами

Любой алгоритм транспортной задачи, сформулированный для случая неограниченных пропускных способностей коммуникаций, может быть распространен на задачи типа  $T_d$ . Мы продемонстрировали это на примере метода потенциалов и венгерского метода. Следует отметить, что логическая структура и трудоемкость отдельной итерации при этом изменяются мало, однако число итераций может заметно возрасти.

В § 4 гл. 1 было показано, что ряд интересных моделей приводится к транспортным задачам с запретами, когда некоторые перевозки заранее полагаются равными нулю (запрещаются). Транспортная задача с запретами может рассматриваться как частный случай задачи  $T_d$ : для запрещенных перевозок значения пропускных способностей  $d_{ij}$  считаются нулевыми. Однако целесообразнее использовать для решения подобных задач алгоритмы, специально приспособленные для их анализа. Тем более, что, как мы сейчас покажем, любой алгоритм задачи  $T$  почти без изменений может быть использован для транспортных задач с запретами. Пусть  $T_0$  — произвольная транспортная задача с запретами. Рассмотрим один из алгоритмов первой группы, например метод потенциалов. Допустим, что исходный опорный план задачи  $T_0$  известен. При решении задачи следует просматривать только такие позиции матриц  $C_h$ , которым отвечают незапрещенные перевозки. В остальном применение метода потенциалов к задаче  $T_0$  ничем не отличается от его использования для анализа задач типа  $T$ . Процесс решения заканчивается, когда все элементы очередной матрицы  $C_l$ , кроме отвечающих запрещенным перевозкам, неотрицательны. На каждой итерации в число базисных вводится одна из незапрещенных перевозок

$x_{ij}$ , для которой  $c_{ij}^{(k)} < 0$  ( $k+1$  — номер итерации). Что касается способа построения исходного плана для задачи  $T_0$ , то он может быть сформулирован на базе венгерского метода (метод северо-западного угла или метод минимального элемента для задачи  $T_0$  не всегда приводит к цели). Для этого система коммуникаций с ненулевыми значениями пропускных способностей принимается за систему допустимых коммуникаций и применяются этапы 1, 2 венгерского метода. Процесс длится до тех пор, пока все незапрещенные перевозки окажутся выделенными. Если суммарная невязка при этом станет равной нулю, то искомый план найден. В противном случае задача  $T_0$  не имеет ни одного плана.

При использовании для решения задачи  $T_0$  алгоритмов второй группы исходный план задачи не определяется. Поэтому при анализе с их помощью задачи  $T_0$  следует лишь помнить, что элементы матриц  $C_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), отвечающие запретным перевозкам, не рассматриваются и, следовательно, не принимаются в расчет в процессе решения задачи.

Алгоритмы третьей группы, один из представителей которых был кратко разобран в предыдущем параграфе, также легко распространить на транспортные задачи с запретами. В ряде случаев приходится иметь дело с задачами типа  $T_d$ , отдельные перевозки которых запрещаются. Для анализа подобных задач используются алгоритмы задач  $T_d$  с учетом тех же замечаний, которые приводились выше для задачи  $T_0$ .

Распределительная задача — одно из наиболее важных в практическом отношении обобщений транспортной задачи. Специфика условий этой задачи позволяет ценой некоторого усложнения приспособить для нее любой из методов решения транспортной задачи.

В § 1 указан ряд свойств распределительной задачи. В § 2 приведен простой алгоритм для решения почти треугольных систем линейных уравнений. В § 3 этот алгоритм используется для построения обобщенного метода потенциалов — одного из возможных способов анализа распределительной задачи. Подробное описание обобщенного метода потенциалов дополняется несколькими важными замечаниями (§ 4) и иллюстрируется числовым примером (§ 5). В заключение главы (§ 6) приведено схематическое изложение метода решения одной специальной задачи, близкой к распределительной.

### § 1. Свойства распределительной задачи

1.1. В гл. 2 описан ряд практических постановок, приводящих к специальной задаче линейного программирования следующего вида. Требуется минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Задачу (1.1)—(1.4) принято называть *распределительной*. В литературе употребляются также и другие названия задачи (1.1)—(1.4). Одно из них —  $\lambda$ -задача — связано с обозначением коэффициентов в условиях (1.3); другое — обобщенная транспортная задача — подчеркивает близость условий (1.2)—(1.4) к ограничениям обычной транспортной задачи.

Встречаются распределительные задачи, в которых условия-неравенства (1.2) заменены уравнениями

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.5)$$

Возможны постановки смешанного типа: часть условий систем (1.2), (1.3) имеет вид равенств, другая часть представляет собой неравенства. Вне зависимости от знаков, связывающих левые и правые части ограничений (1.2)—(1.3), все подобные задачи мы будем называть распределительными.

Условия задачи (1.1)—(1.4) удобно задавать в виде таблицы.

Строка  $i$  табл. 7.1 отвечает  $i$ -му условию системы (1.2); столбец  $j$  соответствует  $j$ -му уравнению системы (1.3).

Таблица 7.1

$a_1 \geq$	$c_{11}; \lambda_{11}$	$c_{12}; \lambda_{12}$	$\dots$	$c_{1n}; \lambda_{1n}$
$a_2 \geq$	$c_{21}; \lambda_{21}$	$c_{22}; \lambda_{22}$	$\dots$	$c_{2n}; \lambda_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m \geq$	$c_{m1}; \lambda_{m1}$	$c_{m2}; \lambda_{m2}$	$\dots$	$c_{mn}; \lambda_{mn}$
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$

Условия-неравенства отмечаются соответствующими знаками (в линиях таблицы, отвечающих условиям-неравенствам, знаки отсутствуют).

Во многих приложениях коэффициенты  $\lambda_{ij} > 0$ . Это условие будет предполагаться выполненным во всех последующих рассмотрениях. Тем не менее большинство приведенных здесь результатов справедливо и для общего случая. К этому вопросу мы вернемся в § 4.

1.2. Характеристическое свойство распределительной задачи состоит в том, что каждый ее вектор условий содержит не более двух ненулевых компонент. Обозначим через  $P_{ij}(\lambda_{ij})$  вектор условий задачи (1.1)—(1.4), связанный с переменной  $x_{ij}$ . Все составляющие вектора  $P_{ij}(\lambda_{ij})$ , кроме  $i$ -й, равной единице, и  $(m+j)$ -й, равной  $\lambda_{ij}$ , — нули. Вектор  $P_{ij}(\lambda_{ij})$  определяется единственным параметром  $\lambda_{ij}$ .

Можно рассмотреть более общую задачу, в которой каждый вектор условий определяется двумя параметрами — значениями двух ненулевых компонент. Условия (1.2) и (1.3) в такой задаче заменяются на

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.6)$$

и

$$\sum_{i=1}^m b_{ij}x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Однако путем простой замены переменных ( $x'_{ij} = a_{ij}x_{ij}$ ) эта более общая задача легко приводится к распределительной задаче (1.1)—(1.4).

Если все элементы матрицы

$$\Lambda = \|\lambda_{ij}\|_{m, n}$$

единицы, то (1.1)—(1.4) — обычная транспортная задача. Таким образом, распределительная задача представляет собой естественное обобщение транспортной задачи. Как уже отмечалось, любая распределительная задача при

$$\Lambda = \|\lambda_{ij}\| = \|\alpha_i \beta_j\| \quad (1.8)$$

легко сводится к транспортной задаче.

Однако, если матрица  $\Lambda$  не может быть представлена в виде (1.8), т. е. если ее ранг больше единицы, то эквивалентность распределительной и транспортной задач нарушается. Как известно, ранг матрицы условий транспортной задачи с  $n+m$  равенствами равен  $n+m-1$ .

Приводимое ниже утверждение показывает, что это свойство сохраняется лишь для тех распределительных задач, матрица которых представима в виде (1.8).

**Теорема 1.1.** Ранг матрицы условий распределительной задачи равен  $n+t$  в том и только в том случае, если ранг матрицы  $\Lambda$  больше единицы ( $\lambda_{ij} \neq 0$  при всех  $i$  и  $j$ ).

**Доказательство.** Необходимость условий теоремы можно считать установленной, так как при выполнении требования (1.8) ограничения (1.2)–(1.3) приводятся к обычным транспортным условиям. Для доказательства достаточности условий теоремы допустим, что ранг матрицы  $\Lambda$  больше единицы, однако ранг матрицы

$$P(\Lambda) = \{P_{11}(\lambda_{11}), P_{12}(\lambda_{12}), \dots, P_{mn}(\lambda_{mn})\}$$

меньше чем  $n+t$ . Это означает, что строки матрицы  $P(\Lambda)$  линейно зависимы, т. е. существуют числа  $\gamma_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n+t$ , не все равные нулю, для которых выполнены равенства

$$\gamma_i + \gamma_{m+j} \lambda_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

При любом  $j = 1, 2, \dots, n$  коэффициент  $\gamma_{m+j} \neq 0$ . Действительно, если  $\gamma_{m+j} = 0$ , то в силу (1.9)  $\gamma_i = 0$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ . Это в свою очередь влечет за собой условие

$$\gamma_{m+j} \lambda_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

По предположению  $\lambda_{ij} \neq 0$ . Следовательно, (1.10) возможно только при  $\gamma_{m+j} = 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ . Итак, предположение  $\gamma_{m+j} = 0$  приводит к равенству нулю всех коэффициентов  $\gamma_s$ , что противоречит принятым допущениям.

Поэтому  $\gamma_{m+j} \neq 0$  и равенства (1.10) могут быть переписаны в эквивалентной форме

$$\lambda_{ij} = \alpha_i \beta_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$\alpha_i = \gamma_i, \quad \beta_j = -\frac{1}{\gamma_{m+j}}.$$

Полученные соотношения противоречат предположению о том, что ранг  $\Lambda$  больше единицы. Следовательно, допущение о линейной зависимости строк матрицы  $P(\Lambda)$  ошибочно; ранг этой матрицы равен  $n+t$ .

## § 2. Метод решения почти треугольных систем линейных уравнений

2.1. Каждый вектор условий задачи (1.1)—(1.4) содержит только две ненулевые компоненты. Если привести задачу (1.1)—(1.4) к канонической форме, то среди ее векторов условий появятся единичные векторы. Рассмотрим квадратную невырожденную матрицу

$$A = \| a_{ij} \|, \quad (2.1)$$

в каждом столбце которой имеется не более двух ненулевых элементов. Любая квадратная подматрица матрицы условий распределительной задачи имеет структуру (2.1).

Основой методов анализа распределительной задачи (как, впрочем, и транспортной задачи) является простой способ решения систем уравнений

$$AX = B, \quad (2.2)$$

$$YA = C, \quad (2.3)$$

обусловленный отмеченной выше спецификой матрицы  $A$ .

Сущность метода связана со следующими соображениями. Допустим, что  $\alpha$ -я строка матрицы  $A$  содержит единственный ненулевой элемент  $a_{\alpha\beta}$ , расположенный в ее  $\beta$ -м столбце. Очевидно, компонента  $x_\beta$  решения  $X$  системы (2.2) находится без труда:

$$x_\beta = \frac{b_\alpha}{a_{\alpha\beta}}.$$

Остальные составляющие решения  $X$  могут быть определены из системы уравнений

$$\sum_{j \neq \beta} a_{ij} x_j = b_i - x_\beta a_{i\beta}, \quad i \neq \alpha, \quad (2.4)$$

матрица которой образуется из  $A$  вычеркиванием  $\alpha$ -й строки и  $\beta$ -го столбца.

В тех же предположениях система (2.3) переписывается в виде

$$\sum_{i \neq \alpha} a_{ij} y_i = \begin{cases} c_j, & j \neq \beta, \\ c_\beta - a_{\alpha\beta} y_\alpha, & j = \beta. \end{cases}$$

Следовательно, все компоненты  $y_i$  ее решения  $Y$ , кроме  $y_\alpha$ , определяются из системы уравнений

$$\sum_{i \neq \alpha} a_{ij} y_i = c_j, \quad j \neq \beta, \quad (2.5)$$

матрица условий которой образуется из  $A^T$  вычеркиванием  $\alpha$ -го столбца и  $\beta$ -й строки. Что касается оставшейся компоненты  $y_\alpha$ , то после решения системы (2.5) она легко подсчитывается по формуле

$$y_\alpha = \frac{1}{a_{\alpha\beta}} \left( c_\beta - \sum_{i \neq \alpha} a_{i\beta} y_i \right). \quad (2.6)$$

Итак, наличие у матрицы  $A$  строки с единственным ненулевым элементом позволяет понизить порядок систем (2.2) и (2.3) на единицу; матрицы новых систем (2.4) и (2.5) образуются из  $A(A^T)$  вычеркиванием линий, содержащих  $a_{\alpha\beta}(a_{\beta\alpha}^T)$ .

Подчеркнем, что если компонента  $x_\beta$  решения  $X$  находится сразу и участвует далее в формировании правой части системы (2.4), то значение составляющей  $y_\alpha$  решения  $Y$  определяется только после отыскания остальных компонент  $Y$ , причем соответствующие значения правых частей (2.3) и (2.5) равны между собой.

**2.2.** Приведенные соображения позволяют шаг за шагом уменьшать размеры систем (2.2) и (2.3). Процесс понижения порядка систем длится до тех пор, пока либо из матрицы  $A$  будут вычеркнуты все элементы, либо будет получена подматрица  $A^*$  матрицы  $A$ , в каждой строке которой содержится более одного ненулевого элемента.

Пусть  $\alpha_\mu$  и  $\beta_\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots, t$   $t \leq s$ ) — номера строки и столбца, вычеркнутых на  $\mu$ -м шаге процесса. В первом случае ( $t=s$ ) решение  $X$  системы (2.2) уже найдено, так как его компоненты вычислялись на каждом шаге. Компоненты  $y_i$  решения  $Y$  определяются по рекуррентным формулам типа (2.6) в порядке, обратном порядку вычеркивания линий, причем

$$y_{\alpha_s} = \frac{c_{\beta_s}}{a_{\alpha_s \beta_s}}.$$



Действительно, выберем произвольный элемент  $a_{i_1 j_1} \neq 0$  матрицы  $A^*$ . Пусть  $a_{i_1 j_2}$  — второй ненулевой элемент строки  $i_1$ ;  $a_{i_2 j_2}$  — второй ненулевой элемент столбца  $j_2$  и т. д.

Переходя последовательно от строки к столбцу и от столбца к строке по ненулевым элементам матрицы  $A^*$ , в конце концов попадаем в  $j_1$ -й столбец, вторым ненулевым элементом которого является  $a_{i_l j_1}$  (в каждой линии  $A^*$  ровно два ненулевых элемента!).

Таким образом, неизвестные  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$  и  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_l}$  действительно удовлетворяют системам (2.8) и (2.9) соответственно. Вычеркнем линии матрицы  $A^*$  с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_l$  и  $j_1, j_2, \dots, j_l$ . Если не все элементы  $A^*$  оказались вычеркнутыми, то, пользуясь теми же правилами, сформируем из оставшейся части еще одну пару систем вида (2.8), (2.9) и т. д. Каждая система типа (2.8) или (2.9) может быть легко решена следующим образом.

Из первого уравнения (2.8) выразим  $x_{j_2}$  через  $x_{j_1}$  и результат подставим во второе уравнение. Далее выразим  $x_{j_3}$  через  $x_{j_1}$  и подставим полученное выражение в третье уравнение и т. д.

Через  $l-1$  шагов придем к последнему уравнению системы (2.8), из которого получим линейное уравнение относительно  $x_{j_1}$  вида

$$\delta_1 x_{j_1} + \delta_2 = 0.$$

В результате определится

$$x_{j_1} = -\frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты при исключаемых переменных (и в том числе  $\delta_1$ ) не могут быть равными нулю, т. е. описанное правило вычисления  $x_{j_1}$  действительно приводит к цели.

Остальные неизвестные системы (2.8) могут быть теперь найдены последовательно из 1-го, 2-го и т. д.,  $(l-1)$ -го уравнений. Аналогично решается и система (2.9).

**2.3.** Резюмируя содержание двух предыдущих пунктов, приходим к следующему правилу решения систем

(2.2) и (2.3), матрица  $A$  которых имеет в каждом столбце не более двух ненулевых элементов.

Из матрицы  $A$  вычеркивается строка с единственным ненулевым элементом  $a_{\alpha, \beta_i}$  и столбец, содержащий этот элемент. Определяется неизвестная  $x_{\alpha_i}$ , с помощью которой преобразуются коэффициенты  $b_i$ . Вычеркнутый столбец запоминается. Процесс понижения порядка матрицы  $A$ , первый шаг которого описан выше, приводит либо к случаю 1, когда все элементы  $A$  оказываются вычеркнутыми, либо к случаю 2, когда в каждой невычеркнутой линии  $A$  содержится ровно два невычеркнутых ненулевых элемента.

В случае 1 все неизвестные системы (2.2) уже найдены; компоненты решения системы (2.3) определяются одна за другой с помощью столбцов  $A$ , просматриваемых в порядке, обратном порядку их вычеркивания.

В случае 2 системы (2.2) и (2.3), отвечающие невычеркнутой части матрицы  $A$ , распадаются на несколько пар систем вида (2.8) и (2.9) (в частности, эта пара может быть единственной).

Каждая из систем (2.8) или (2.9) решается отдельно. Неизвестные системы последовательно выражаются через одну из них; в результате получают линейное уравнение относительно этой неизвестной. Затем одну за другой определяют остальные неизвестные. Решив все системы типа (2.8), получаем искомое решение системы (2.2). Что касается системы (2.3), то после решения всех систем типа (2.9) определяем последовательно те ее неизвестные, которые отвечают вычеркнутым строкам  $A$ , придерживаясь того же порядка, что и в случае 1.

Условимся говорить, что матрица  $A$ , для которой процесс вычеркивания линий завершается случаем 1, является *треугольной*. Этот термин связан с тем, что любая треугольная матрица путем соответствующей перестановки строк и столбцов может быть преобразована в матрицу, ниже главной диагонали которой расположены одни нули. Отметим, что линии новой матрицы нумеруются в порядке, противоположном порядку их вычеркивания. Если матрица  $A$  не является треугольной, то процесс вычеркивания линий не позволяет определить

всех неизвестных систем (2.2) и (2.3). Однако если матрица  $A$  содержит в каждом столбце не более двух ненулевых элементов, процесс вычеркивания сводит решение систем (2.2) и (2.3) к анализу простых систем типа (2.8) и (2.9). Соответствующей перенумерацией

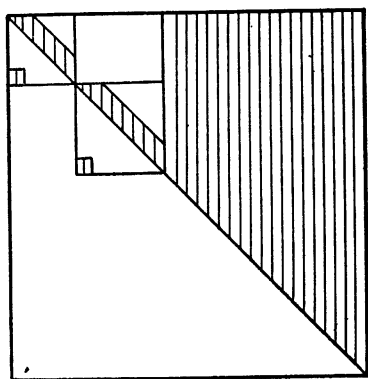


Рис. 7.1.

линий матрица, обладающая отмеченным свойством, может быть приведена к виду, изображенному схематически на рис. 7.1 (незаштрихованные позиции матрицы заняты нулями). В данном случае анализ системы (2.2) сводится к решению двух систем типа (2.8).

Матрицу, которая за счет перенумерации строк и столбцов может быть приведена к виду, схематически изображенному

на рис. 7.1, естественно назвать *почти треугольной*. Нетрудно убедиться, что любой базис транспортной задачи является треугольной матрицей (этим мы уже не раз пользовались в предыдущих главах). То же относится и к распределительной задаче, матрица  $\Lambda$  которой представима в виде (1.8). Если же ранг матрицы  $\Lambda$  больше единицы, то любой базис, составленный из векторов  $P_{ij}(\lambda_{ij})$ , не является треугольной матрицей. Однако каждый такой базис заведомо имеет почти треугольный вид. Отмеченные обстоятельства определяют сходство и различие транспортной и распределительной задач, а также методов их анализа.

### § 3. Обобщенный метод потенциалов

3.1. Для решения распределительной задачи может быть использован любой конечный метод линейного программирования. Мы ограничимся здесь лишь методом улучшения плана, хотя описанный в предыдущем пара-

графе способ решения систем уравнений с почти треугольной матрицей дает все необходимое к тому, чтобы приспособить для анализа распределительной задачи и другие методы. Метод, излагаемый ниже, совпадает с обычным методом потенциалов, если матрица  $\Lambda$  распределительной задачи допускает представление (1.8). В общем случае он также имеет много общего с методом потенциалов. Отсюда и название — *обобщенный метод потенциалов*.

В дальнейшем условимся называть оценки ограниченных (1.2) и (1.3) относительно текущего (оптимального) базиса предварительными потенциалами (потенциалами) строк и столбцов соответственно. Это определение связано с табличным представлением распределительной задачи (см. табл. 7.1).

Обобщенный метод потенциалов складывается из конечного числа итераций. Каждая итерация разбивается на два этапа. На первом этапе имеющийся опорный план проверяется на оптимальность. Для этой цели в соответствии со способом § 2 вычисляются предварительные потенциалы, которые позволяют либо убедиться в оптимальности плана, либо выделить вектор условий, подлежащий включению в базис. Центральной частью второго этапа является разложение вектора условий, выбранного для введения в базис, по векторам базиса. Здесь опять используется способ решения систем уравнений, изложенный в § 2. Далее определяется значение переменной, отвечающей вводимому вектору (параметр  $\theta_0$ ), после чего вычисляются компоненты нового опорного плана. Как видим, обобщенный метод потенциалов подобно методу потенциалов отличается от второго алгоритма метода улучшения плана только тем, что параметры, необходимые для проведения итерации, рассчитываются не по рекуррентным формулам, а путем решения соответствующих систем уравнений. Естественно, что обратная матрица базиса, которая пересчитывается на каждом шаге второго алгоритма, оказывается теперь излишней.

**3.2.** План задачи (1.1) — (1.4) удобно записывать в виде матрицы

$$X = \|x_{ij}\|_{m, n+1}$$

размеров  $m \times (n+1)$ . В первых  $n$  столбцах матрицы  $X$  помещаются компоненты плана; последний,  $(n+1)$ -й столбец, занимается дополнительными компонентами  $x_{i, n+1}$ , переводящими условия (1.2) в строгие равенства. Элемент  $x_{ij}$  матрицы  $X$ , расположенный в пределах первых  $n$  столбцов, входит в два уравнения системы ограничений, отвечающие  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу  $X$ . Элемент  $x_{i, n+1}$  входит только в одно уравнение, которое соответствует  $i$ -й строке матрицы  $X$ . Другими словами, компоненте  $x_{ij}$  при  $1 \leq j \leq n$  отвечает вектор условий с двумя ненулевыми составляющими, а компоненте  $x_{i, n+1}$  соответствует единичный вектор.

Приведем описание отдельной итерации метода, считая известным некоторый опорный план  $X$ . Как было показано (см. теорему 1.1), ранг системы условий (1.2), (1.3) естественно считать равным  $n+m$ .

Поэтому в предположении невырожденности задачи, которое сохраняется вплоть до п. 4.1, матрица  $\|x_{ij}\|_{m, n+1}$  содержит ровно  $n+m$  положительных элементов.

Этап 1 позволяет найти предварительные потенциалы путем решения системы (2.3), где  $A$  — матрица базиса текущего опорного плана.

Этап 1 начинается процессом вычеркивания линий матрицы  $X$  в соответствии с § 2. Последовательно просматриваются строки матрицы  $X$  и вычеркиваются те из них, которые содержат единственный положительный элемент. Положительные элементы вычеркнутых строк отмечаются штрихами (' ). Далее последовательно просматриваются первые  $n$  столбцов матрицы  $X$  и вычеркиваются те из них, которые содержат единственный неотмеченный еще положительный элемент. Положительный элемент вычеркиваемого столбца отмечается звездой (\*). Затем снова переходят к строкам, вычеркивая те из них, которые содержат единственный еще не отмеченный положительный элемент, и т. д.

Положительные элементы вычеркиваемых линий отмечаются штрихом или звездой и нумеруются в порядке вычеркивания соответствующих линий. Процесс вычеркивания линий длится либо до исчерпания всех элементов матрицы  $X$  (случай 1), либо до получения такой подматрицы из неотмеченных элементов матрицы  $X$ , в

каждой линии которой содержится ровно два положительных элемента (случай 2). Как видим, вычеркивая линии матрицы  $X$ , мы в точности следуем рекомендациям § 2. Штрихи и звезды, которыми отмечаются положительные элементы матрицы  $X$ , служат для того, чтобы зафиксировать, какое из двух уравнений, содержащих соответствующее неизвестное, вычеркивается на данном шаге: строчное или столбцовое.

Номера, которыми снабжаются положительные элементы вычеркиваемых линий, отвечают порядку исключения неизвестных. Результат процесса вычеркивания используется на обоих этапах итерации.

3.3. Переходим к вычислению предварительных потенциалов  $u_i$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , и  $v_j$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ . Система уравнений, которой удовлетворяют искомые оценки, применительно к данной задаче имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ij}v_j - u_i &= c_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0, & j \leq n, \\ u_i &= 0, & \text{если } x_{i, n+1} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Рассмотрим каждый из случаев, которым может завершиться процесс вычеркивания линий.

Случай 1 означает, что все положительные элементы матрицы  $X$  отмечены. Выбираем отмеченный элемент с наибольшим номером. Легко убедиться, что он обязательно лежит в  $(n+1)$ -м столбце. Учитывая (3.1), полагаем предварительный потенциал соответствующей строки равным нулю. Далее переходим к отмеченному элементу с номером, меньшим на единицу. Ему отвечает одно из уравнений системы (3.1), причем, если это верхнее уравнение, то  $u_i$  уже найден (в данном случае  $u_i=0$ ). Следовательно, имеется возможность вычислить еще один предварительный потенциал. Просматривая один за другим отмеченные элементы матрицы в порядке убывания их номеров и используя уравнения системы (3.1), определяем все предварительные потенциалы. Рекуррентные формулы, вытекающие из (3.1), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \begin{cases} \lambda_{ij}v_j - c_{ij}, & \text{если } x_{ij} = x'_{ij} > 0, j \leq n, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = x_{i, n+1} > 0, \end{cases} \\ v_j &= \frac{c_{ij} + u_i}{\lambda_{ij}}, & \text{если } x_{ij} = x^*_{ij} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

К моменту вычисления левых частей (3.2) предварительные потенциалы, стоящие в их правых частях, уже найдены.

Случай 2 предполагает наличие неотмеченных положительных элементов, причем каждая линия матрицы  $X$  либо вовсе не содержит их, либо содержит два таких элемента. Можно проверить, что  $(n+1)$ -й столбец матрицы  $X$  не может содержать неотмеченных положительных элементов.

В соответствии с результатами § 2 неотмеченные положительные элементы составляют одну или несколько замкнутых цепочек вида

$$x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_{t-1} j_{t-1}}, x_{i_1 j_{t-1}}. \quad (3.3)$$

Пользуясь уравнениями системы (3.1), соответствующими элементам цепочки (3.3), можно один за другим выразить через  $u_{i_1}$  предварительные потенциалы  $v_{j_1}, u_{i_2}, v_{j_2}, \dots, u_{i_{t-1}}, v_{j_{t-1}}$  и, наконец, получить новое выражение для  $u_{i_t}$ . Каждый из предварительных потенциалов  $u_{i_k}, v_{j_k}$  является линейной функцией  $u_{i_1}$ . Положим

$$\left. \begin{aligned} u_{i_k} &= \alpha_{2k-1} + \beta_{2k-1} u_{i_1}, & k &= 1, 2, \dots, t \quad (u_{i_t} = u_{i_1}), \\ v_{j_k} &= \alpha_{2k} + \beta_{2k} u_{i_1}, & k &= 1, 2, \dots, t-1. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Из соответствующих уравнений системы (3.1) получаем рекуррентные соотношения

$$\alpha_{2k} = \frac{c_{i_k j_k} + \alpha_{2k-1}}{\lambda_{i_k j_k}}, \quad \beta_{2k} = \frac{\beta_{2k-1}}{\lambda_{i_k j_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, t-1, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2k+1} &= \lambda_{i_{k+1} j_k} \alpha_{2k} - c_{i_{k+1} j_k}, & \beta_{2k+1} &= \lambda_{i_{k+1} j_k} \beta_{2k}, \\ k &= 1, 2, \dots, t-1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соотношения (3.5) и (3.6) позволяют, отправляясь от  $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 1)$ , подсчитать последовательно

$$(\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots, (\alpha_{2t-1}, \beta_{2t-1}).$$

Используя далее два выражения для  $u_{i_t}$ , приходим к уравнению

$$u_{i_1} = \alpha_{2t-1} + \beta_{2t-1} u_{i_1},$$

из которого получаем

$$u_{i_1} = \frac{\alpha_{2t-1}}{1 - \beta_{2t-1}}. \quad (3.7)$$

Остальные предварительные потенциалы, отвечающие цепочке (3.3), определяются из выражений (3.4) — (3.6).

Практически составление цепочки (3.3) и расчет по рекуррентным формулам (3.5) и (3.6) коэффициентов  $\alpha_\gamma$ ,  $\beta_\gamma$  производятся одновременно. В качестве  $x_{i_1 j_1}$  принимается произвольный неотмеченный положительный элемент матрицы  $X$ . Элемент  $x_{i_2 j_1}$  — второй неотмеченный положительный элемент  $j_1$ -го столбца,  $x_{i_2 j_2}$  — второй неотмеченный положительный элемент  $i_2$ -й строки и т. д. По мере продвижения по цепочке, которое определяется однозначно, подсчитываются  $\alpha_\gamma$  и  $\beta_\gamma$ . Процесс заканчивается на элементе  $x_{i_1 j_{t-1}}$ , расположенном в  $i_1$ -й строке.

Элементы матрицы  $X$ , принадлежащие одной из уже просмотренных цепочек, назовем *использованными*. Если  $X$  содержит положительные неотмеченные и неиспользованные элементы, то один из них принимается за начало новой цепочки и описанная последовательность действий повторяется. Поступая так несколько раз (столько, сколько имеется замкнутых цепочек вида (3.3)), приходим к положению, когда все неотмеченные положительные элементы являются использованными. Предварительные потенциалы линий, содержащих использованные элементы, определены. Остальные предварительные потенциалы отвечают вычеркнутым линиям и вычисляются точно так же, как и в случае 1. Разница состоит лишь в том, что отмеченный элемент с максимальным номером теперь уже не обязательно расположен в  $(n+1)$ -м столбце. Однако один из предварительных потенциалов, входящих в его уравнение, заведомо известен.

**3.4.** Определив все предварительные потенциалы, составляют величины

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \lambda_{ij} v_j + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Критерий оптимальности распределительной задачи, вытекающий из теоремы 7.2 гл. 3 [52] утверждает, что

план  $X$  является оптимальным, если

$$\Delta_{ij} \geq 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

$$u_i \geq 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.9)$$

При выполнении условий (3.8), (3.9) процесс решения, естественно, заканчивается. В случае нарушения хотя бы одного из условий (3.8), (3.9) переходят ко второму этапу, на котором производится улучшение имеющегося плана.

Этап 2 начинается с выбора вектора, подлежащего включению в базис. Для этого среди величин  $\Delta_{ij}$  и  $u_i$  выбирается минимальная.

1. Допустим вначале, что минимум достигается на  $u_{r_1}$ . В базис следует ввести единичный вектор  $e_{r_1}$ . Способ, изложенный в § 2, позволяет довольно легко определить коэффициенты разложения  $\bar{x}_{ij}$  вектора  $e_{r_1}$  по базису. При этом, естественно, следует учесть особенность правой части системы (2.2): в данном случае  $B$  — единичный вектор. Вначале, как установлено в § 2, вычисляются коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$ , отвечающие отмеченным элементам  $x_{ij}$ , в порядке присвоенных им номеров. Поскольку все компоненты вектора  $e_{r_1}$ , кроме  $r_1$ -ой, равны нулю, то первый ненулевой коэффициент  $\bar{x}_{ij}$  определится при вычеркивании  $r_1$ -й строки; им является

$$\bar{x}_{r_1 d_1} = 1,$$

где  $d_1$  — номер столбца, содержащего  $x'_{r_1 d_1}$ .

После отыскания  $\bar{x}_{r_1 d_1}$  правая часть исследуемой системы уравнений становится равной

$$-\lambda_{r_1 d_1} e_{m+d_1}.$$

Следовательно, следующий ненулевой коэффициент  $\bar{x}_{ij}$  будет найден при вычеркивании  $d_1$ -го столбца. Это

$$\bar{x}_{r_2 d_1} = -\frac{\lambda_{r_1 d_1}}{\lambda_{r_2 d_1}},$$

где  $r_2$  — номер строки, содержащей  $x^*_{r_2 d_1}$ .

Приведенные рассуждения показывают, что для определения всех ненулевых коэффициентов  $\bar{x}_{ij}$ , соответствующих отмеченным элементам, необходимо со-





Итак, отличные от нуля коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  разложения вектора  $e_{r_1}$  по базису плана  $X$  определяются следующим образом. Вначале, переходя от элемента со штрихом к элементу со звездой по столбцу и от элемента со звездой к элементу со штрихом по строке, строят цепочку (3.10) или (3.11), причем одновременно вычисляют соответствующие коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  из соотношений (3.12). Если цепочка имеет вид (3.10), причем  $d_s = n + 1$ , то найдены все ненулевые коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$ . Если цепочка имеет вид (3.10), однако  $d_s \leq n$ , то строят замкнутую цепочку (3.3), отправляясь от неотмеченного положительного элемента  $x_{i_1 d_s} = x_{i_1 j_1}$ . Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$ , отвечающие элементам (3.3), вычисляются по формулам (3.16). Если же цепочка имеет вид (3.11), то началом замкнутой цепочки (3.3) является положительный неотмеченный элемент  $x_{r_s j_1} = x_{i_1 j_1}$ . Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$ , отвечающие элементам (3.3), в данном случае вычисляются по формулам (3.17).

2. Рассмотрим случай, когда минимальной среди величин  $\Delta_{ij}$  и  $u_i$  является  $\Delta_{r_1 d_1}$ . Тогда в базис вводится вектор

$$P_{r_1 d_1}(\lambda_{r_1 d_1}).$$

Этот вектор представим в виде

$$P_{r_1 d_1}(\lambda_{r_1 d_1}) = e_{r_1} + \lambda_{r_1 d_1} e_{m+d_1},$$

где через  $e_\alpha$ , как обычно, обозначен единичный вектор с единицей в  $\alpha$ -й позиции.

Поэтому коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  разложения вектора  $P_{r_1 d_1}(\lambda_{r_1 d_1})$  по базису плана  $X$  могут быть получены из соотношения

$$\bar{x}_{ij} = \bar{x}_{ij}^{(1)} + \lambda_{r_1 d_1} \bar{x}_{ij}^{(2)}, \quad (3.18)$$

где  $\bar{x}_{ij}^{(1)}$  и  $\bar{x}_{ij}^{(2)}$  являются коэффициентами разложения единичных векторов  $e_{r_1}$  и  $e_{m+d_1}$  соответственно по данному базису.

Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}^{(1)}$  определяются по описанным выше правилам. Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}^{(2)}$  могут быть вычислены аналогичным образом с той разницей, что в данном случае цепочка из отмеченных элементов начинается

элементом со звездой, расположенным в  $d_1$ -м столбце. Итак, коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  для вектора  $P_{r_1 d_1}(\lambda_{r_1 d_1})$  определяются из (3.18), причем  $\bar{x}_{ij}^{(1)}$  и  $\bar{x}_{ij}^{(2)}$  вычисляются по правилам предыдущего пункта.

Допустим, что коэффициенты разложения  $\bar{x}_{ij}$  вводимого вектора по векторам базиса уже найдены. Для определения величины  $\theta_0$  новой базисной переменной составляются отношения

$$\frac{x_{ij}}{\bar{x}_{ij}} \text{ при } \bar{x}_{ij} > 0.$$

Как известно из описания метода улучшения плана,

$$\theta_0 = \min_{\bar{x}_{ij} > 0} \frac{x_{ij}}{\bar{x}_{ij}} = \frac{x_{i'j'}}{\bar{x}_{i'j'}}. \quad (3.19)$$

Остальные базисные компоненты нового опорного плана имеют вид

$$x_{ij} - \theta_0 \bar{x}_{ij}, \quad (3.20)$$

где

$$(i, j) \neq (i', j').$$

Этап 2 закончен.

В силу предположения о невырожденности каждая итерация обобщенного метода потенциалов увеличивает линейную форму задачи. Через несколько итераций этап 1 очередного шага завершится выяснением оптимальности плана, построенного на предыдущей итерации.

## § 4. Дополнительные замечания

4.1. Остановимся на некоторых вопросах, относящихся к обобщенному методу потенциалов, но не затронутых в предыдущем параграфе. Если исследуемая задача является вырожденной, то течение отдельной итерации метода практически не нарушается. Роль положительных компонент в этом случае, как обычно, переходит к базисным составляющим плана, некоторые из которых могут равняться нулю.

Вектор, исключаемый из базиса, в вырожденном случае определяется неоднозначно. Правило выбора исключаемого вектора, полностью устраняющее возможность

зацикливания при решении задачи обобщенным методом потенциалов, является достаточно трудоемким. Его реализация связана с разложением ряда единичных векторов по векторам базиса.

Учитывая, что практически зацикливание не представляет опасности, можно пользоваться упрощенным правилом. Из базиса исключается любой вектор, на котором достигается минимум (3.19).

4.2. До сих пор мы предполагали элементы матрицы  $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|_{m,n}$  положительными числами. Однако обобщенный метод потенциалов применим к задаче с любой матрицей  $\Lambda$ . Действительно если  $\lambda_{ij}=0$ , то

$$P_{ij}(\lambda_{ij}) = e_i.$$

Следовательно, компоненты  $x_{ij}$  и  $x_{i,n+1}$  могут быть объединены в одну  $x_{i,n+1}$ , причем

$$c_{i,n+1} = \min(0, c_{ij}).$$

После этого задачу можно решать описанным алгоритмом, считая, что  $x_{ij}=0$ , если  $\lambda_{ij}=0$ .

Что касается отрицательных  $\lambda_{ij}$ , то, как видно из описания метода, их присутствие не сказывается на процессе решения.

4.3. Чтобы полностью завершить изложение метода решения распределительной задачи, нам осталось рассмотреть вопрос об отыскании ее исходного опорного плана. Излагаемый ниже метод основан на тех же соображениях, что и метод минимального элемента для транспортной задачи.

Выберем произвольную позицию  $(i_1, j_1)$  искомой матрицы  $X_0$ . Положим

$$x_{i_1 j_1}^{(0)} = \begin{cases} \min \left\{ a_{i_1}, \frac{b_{j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}} \right\}, & \text{если } \lambda_{i_1 j_1} > 0, \\ a_{i_1}, & \text{если } \lambda_{i_1 j_1} \leq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) определяет максимальное  $x_{i_1 j_1}$ , величина которого не противоречит условиям задачи. (Без ограничения общности коэффициенты  $b_j$  предполагаются неотрицательными.)

Если  $x_{i_1 j_1}^{(0)} = a_{i_1}$ , то полагаем

$$x_{i_1 j}^{(0)} = 0 \quad \text{для } j \neq j_1.$$

Если

$$x_{i_1 j_1}^{(0)} = \frac{b_{j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}},$$

то полагаем  $x_{i j_1}^{(0)} = 0$  для  $i \neq i_1$ . В случае равенства

$$a_{i_1} = \frac{b_{j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}},$$

которое может иметь место только при наличии вырожденной ситуации, нулями дополняется либо  $i_1$ -я строка, либо  $j_1$ -й столбец матрицы  $X_0$ . Далее преобразуем естественным образом правые части ограничений (1.2), (1.3), положив

$$a'_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq i_1, \\ a_i - x_{i_1 j_1}^{(0)}, & \text{если } i = i_1, \end{cases}$$

$$b'_j = \begin{cases} b_j, & \text{если } j \neq j_1, \\ b_j - \lambda_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1}^{(0)}, & \text{если } j = j_1. \end{cases}$$

Следующий шаг производится по тем же правилам, причем очередная позиция  $(i_2, j_2)$  может быть выбрана среди еще не заполненных позиций матрицы  $X_0$  произвольно, а параметры  $a_i$  и  $b_j$  в (4.1) заменяются на  $a'_i$  и  $b'_j$ .

Процесс заканчивается заполнением всех позиций матрицы  $X_0$  (на каждом шаге заполняется ровно одна линия матрицы).

По построению

$$\sum_{j=1}^n x_{i j}^{(0)} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{i j} x_{i j}^{(0)} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{i j} x_{i j}^{(0)} = b_j \quad \text{для всех } j,$$

то  $X_0$  — опорный план задачи.

Если при некоторых  $j$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij}^{(0)} < b_j, \quad (4.2)$$

то для них вводятся новые переменные

$$x_{m+1, j} = b_j - \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij},$$

причем  $c_{m+1, j}$  полагается равным достаточно большому числу  $M$ . К  $M$ -задаче, состоящей в минимизации

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + M \sum_{j \in J} x_{m+1, j}$$

при условиях (1.2), (1.4) и

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} = b_j, \quad \text{если } j \in J,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_{ij} + x_{m+1, j} = b_j, \quad \text{если } j \notin J,$$

применяется обобщенный метод потенциалов. Здесь  $J$  — множество индексов  $j$ , для которых верно неравенство (4.2). Матрица  $X_0$ , дополненная  $(m+1)$ -й строкой величин  $x_{m+1, j}^{(0)}$ , принимается за исходный опорный план. Процесс решения почти не отличается от того, который был описан в предыдущем параграфе. Разница состоит только в наличии дополнительной  $(m+1)$ -й строки, обладающей той же особенностью, что и  $(n+1)$ -й столбец: элементам этих линий отвечают единичные векторы условий. Как только в процессе решения  $M$ -задачи образуется план с нулями в  $(m+1)$ -й строке, эта строка вычеркивается, а оставшиеся элементы составляют опорный план задачи (1.1) — (1.4). Если же в оптимальном плане  $M$ -задачи имеются положительные компоненты  $x_{m+1, j}$ , то это указывает на несовместность условий (1.2) — (1.4). Обоснование высказанных утверждений в общем случае дано при описании  $M$ -метода (см. п. 9.2 гл. 4 [52]).

Итак, для отыскания исходного опорного плана рас-  
пределительной задачи может быть использован аналог

метода минимального элемента плюс, быть может, несколько итераций обобщенного метода потенциалов. В отличие от транспортной задачи процесс построения опорного плана распределительной задачи может завершиться выявлением несовместности ее условий.

4.4. Как отмечалось, порядок заполнения позиций матрицы  $X_0$  может быть произвольным. Как и в случае транспортной задачи, рациональный выбор этого порядка может значительно сократить число последующих итераций обобщенного метода потенциалов.

Отметим два возможных порядка. Первый используется в методе минимального элемента: очередная позиция определяется минимальным элементом матрицы  $C$ , причем выбор производится среди еще не заполненных позиций матрицы  $X_0$ . Второй порядок [29] представляет собой естественное обобщение приближенного метода решения транспортной задачи, предложенного Фогелем [37]. Этот порядок несколько сложнее предыдущего, однако во многих случаях приводит к лучшему первому приближению. Суть его применительно к выбору первой позиции  $(i_1, j_1)$  состоит в следующем. Для каждого столбца вычисляются величины

$$h_j = \min \left( \frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}} \right), \quad h'_j = \min \left( \frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}} \right),$$

где первый минимум берется по всем тем  $i$ , для которых  $\lambda_{ij} > 0$ , а второй — по тем из них, для которых  $\frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}} > h_j$ .

Искомый столбец  $j_1$  определяется из условия

$$h'_{j_1} - h_{j_1} + \gamma_{j_1} M = \max_{1 \leq j \leq n} (h'_j - h_j + \gamma_j M),$$

где  $\gamma_j$  — число нулевых элементов в  $j$ -м столбце матрицы  $\Lambda$ ;  $M$  — достаточно большое число.

Номер строки  $i_1$  определяется равенством

$$h_{j_1} = \frac{c_{i_1 j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}}.$$

Отметим, что элементы матрицы  $C$  и  $\Lambda$  предполагаются здесь неотрицательными.

## § 5. Пример

Решим обобщенным методом потенциалов распределительную задачу, условия которой записаны в табл. 7.2.

Начнем с определения исходного опорного плана. Исходный опорный план построен в соответствии с методом, описанным в п. 4.3.

Порядок заполнения матрицы  $X_0$  отмечен в матрице

$$C = \begin{vmatrix} 1^{(1)} & 1 \\ 2 & 1^{(2)} \\ 5^{(4)} & 1^{(3)} \end{vmatrix}.$$

На первом шаге заполняется 1-я строка, на втором — 2-я строка. На последующих двух шагах заполняются 2-й столбец и 3-я строка.

Получаем

$$X_0 = \left\| \begin{array}{cc|c} 2 & & \\ & 2 & \\ 2 & 0 & \end{array} \right\|.$$

Таблица 7.2

$2 \geq$	1; 1	1; 2
$2 \geq$	2; 2	1; 3
$2 \geq$	5; 2	1; 1
	6, 5	6

(Как обычно, отмечают только базисные компоненты.) Элементы матрицы  $X_0$  удовлетворяют всем условиям задачи, кроме первого столбцового ограничения.

Необходимо приступить к решению соответствующей  $M$ -задачи, приняв за исходный опорный план

$$X_0 = \left\| \begin{array}{cc|c} 2'_1 & & \\ & 2'_2 & \\ 2'_4 & 0^*_3 & \\ \hline 0,5^*_5 & & \end{array} \right\|.$$

В матрице  $X_0$   $(n+1)$ -й столбец и  $(m+1)$ -я строка отделены линиями.

Итерация I. Этап 1. Последовательно вычеркиваем линии и отмечаем элементы  $x_{11}^{(0)} = 2$  (штрихом),  $x_{22}^{(0)} = 2$  (штрихом),  $x_{32}^{(0)} = 0$  (звездой),  $x_{31}^{(0)} = 2$  (штрихом),  $x_{41}^{(0)} = 0,5$  (звездой). Порядок отметки зафиксирован с помощью номеров, стоящих у соответствующих элементов  $X_0$ . Все элементы  $X_0$  отмечены. Имеет место случай 1, означающий, что базис плана  $X_0$  является матрицей треугольного вида. В данной задаче имеется не только особый  $(n+1)$ -й столбец, но и особая  $(m+1)$ -я строка. Последний отмеченный элемент в 1-м случае обязан принадлежать одной из особых линий, что и соблюдается для матрицы  $X_0$ .

Определяем последовательно предварительные потенциалы

$$v_1 = c_{41} = M, \quad u_3 = \lambda_{31}v_1 - c_{31} = 2M - 5,$$

$$v_2 = \frac{1}{\lambda_{32}}(c_{32} + u_3) = 2M - 4,$$

$$u_3 = \lambda_{22}v_2 - c_{22} = 6M - 13, \quad u_1 = \lambda_{11}v_1 - c_{11} = M - 1.$$

При достаточно большом  $M$  предварительные потенциалы положительны. Следовательно, нет оснований для введения дополнительных единичных векторов.

Подсчитаем  $\Delta_{21}$  и  $\Delta_{12}$ :

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\lambda_{21}v_1 - u_2) = 4M - 11 > 0,$$

$$\Delta_{12} = c_{12} - (\lambda_{12}v_2 - u_1) = 8 - 3M < 0.$$

Условия оптимальности нарушены. Переходим ко 2-му этапу.

Этап 2. Вектор  $P_{12}$  (2) вводится в базис. В соответствии с алгоритмом определяем коэффициенты разложения  $\bar{x}_{ij}^{(1)}$  и  $\bar{x}_{ij}^{(2)}$  векторов  $e_1$  и  $e_5$  по базису.

Отправляясь от позиции (1.2), составляем две цепочки

$$x'_{11}, x^*_{41} \text{ и } x^*_{32}, x'_{31}, x^*_{41}.$$

Имеем

$$\bar{x}_{11}^{(1)} = 1, \quad \bar{x}_{41}^{(1)} = -x_{11}^{(1)} = -1,$$

$$\bar{x}_{32}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{32}} = 1, \quad \bar{x}_{31}^{(2)} = -1, \quad x_{41}^{(2)} = -\lambda_{31} \cdot x_{31}^{(2)} = 2.$$

Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  разложения вектора  $P_{12}(2)$  по данному базису, равные  $\bar{x}_{ij}^{(1)} + 2x_{ij}^{(2)}$ , записаны в виде матрицы  $\bar{X}_0$ :

$$\bar{X}_0 = \left\| \begin{array}{cc|c} 1 & . & \\ 0 & 0 & \\ -2 & 2 & \\ \hline 3 & & \end{array} \right\|.$$

Вычисляем

$$\theta_0 = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0,5}{3} \right\} = 0.$$

Имеет место вырожденная ситуация: этап 2 изменил только базис плана, а значение линейной формы сохранилось. Новые базисные переменные отмечены в матрице  $X_1$ :

$$X_1 = \left\| \begin{array}{cc|c} 2'_4 & 0_3^* & \\ & 2'_1 & \\ & 2'_2 & \\ \hline 0,5_5^* & & \end{array} \right\|.$$

Итерация II. Этап 1. Порядок отметки элементов матрицы  $X_1$  указан. Определяем один за другим предварительные потенциалы:

$$v_1 = c_{41} = M, \quad u_1 = v_1 - c_{11} = M - 1, \quad v_2 = \frac{1}{2} (u_1 + c_{12}) = \frac{M}{2},$$

$$u_3 = 2v_1 - c_{31} = 2M - 5, \quad u_2 = 3v_2 - c_{22} = \frac{3}{2} M - 1.$$

Затем вычисляем

$$\Delta_{21} = c_{21} - (\lambda_{21}v_1 - u_2) = -\frac{1}{2} M + 1 < 0.$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - (\lambda_{32}v_2 - u_3) = \frac{3}{2} M - 4 > 0.$$

Условия оптимальности нарушены.

Этап 2. Вектор  $P_{21}(2) = e_2 + 2e_4$  вводится в базис. Образует цепочки

$$x'_{22}, \quad x^*_{12}, \quad x'_{11}, \quad x^*_{41} \text{ и } x^*_{41}.$$

Далее последовательно вычисляем

$$\bar{x}_{22}^{(1)} = 1, \bar{x}_{12}^{(1)} = -\frac{3}{2}, \bar{x}_{11}^{(1)} = \frac{3}{2}, \bar{x}_{41}^{(1)} = -\frac{3}{2}, \bar{x}_{41}^{(2)} = 1.$$

Коэффициенты  $\bar{x}_{ij}$  разложения вектора  $P_{21}(2)$  указаны в матрице  $\bar{X}_1$ :

$$\bar{X}_1 = \left\| \begin{array}{cc|c} 3/2 & -3/2 & \\ \cdot & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline 1/2 & & \end{array} \right\|.$$

Находим  $\theta_0 = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{3/2}, \frac{0,5}{0,5} \right\} = 1$  и определяем новый опорный план  $X_2 = X_1 - \theta_0 \bar{X}_1 = X_1 - \bar{X}_1$ .

$$X_2 = \left\| \begin{array}{cc|c} 1/2 & 3/2 & \\ 1 & 1 & \\ 2' & & \\ \hline & & \end{array} \right\|.$$

В последней строке  $X_2$  стоят нули, т. е.  $X_2$  — план данной задачи. Дальнейшие преобразования производятся с матрицами размеров  $3 \times 3$ .

Итерация III. Этап 1. Пометив штрихом элемент  $x_{31} = 2$ , приходим к случаю 2, означающему, что базис плана  $X_2$  имеет почти треугольный вид. Замкнутая цепочка состоит из неотмеченных элементов

$$x_{21}, x_{11}, x_{12}, x_{22}.$$

Определяем предварительные потенциалы  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , отвечающие линиям, которые содержат неотмеченные элементы. Для этого последовательно находим выражения  $v_1, u_2, v_2$  и, наконец,  $u_1$  через  $u_1$ :

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_{11}}(c_{11} + u_1) = 1 + u_1,$$

$$u_2 = \lambda_{21}v_1 - c_{21} = 2u_1;$$

$$v_2 = \frac{1}{\lambda_{22}}(c_{22} + u_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_1,$$

$$u_1 = \lambda_{12}v_2 - c_{12} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u_1.$$

Получили уравнение

$$u_1 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} u_1,$$

откуда  $u_1 = 1$ . Итак,

$$u_1 = 1, v_1 = 2, u_2 = 2, v_2 = 1.$$

Обратившись к единственному отмеченному элементу  $x'_{31}$ , имеем

$$u_3 = \lambda_{31} v_1 - c_{31} = -1.$$

Кроме того, вычислим

$$\Delta_{32} = c_{32} - (\lambda_{32} v_2 - u_3) = -1.$$

Критерий оптимальности нарушен, так как  $u_3 < 0$ ,  $\Delta_{32} < 0$ .

Этап 2. В базис вводится вектор  $e_3$ . Цепочка состоит из единственного отмеченного элемента  $x'_{31}$ . Следовательно,  $\bar{x}_{31} = 1$ . Остальные ненулевые коэффициенты разложения  $e_3$  по базису определяем с помощью замкнутой цепочки из неотмеченных элементов.

Воспользуемся соотношениями (3.15) и (3.16) при  $i_1 = 2, i_2 = 1, j_1 = 1, j_2 = 2$ . Имеем

$$\delta_1 = \frac{2}{1}, \quad \delta_2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3}, \quad \bar{x}_{r_s d_s} = \bar{x}_{31} = 1;$$

$$\bar{x}_{21} = -\bar{x}_{22} = \frac{4/3}{1 - 4/3} = -4,$$

$$\bar{x}_{12} = -\bar{x}_{11} = \frac{2}{1 - 4/3} = -6.$$

В результате получена матрица

$$\bar{X}_2 = \left\| \begin{array}{cc} 6 & -6 \\ -4 & 4 \\ 1 & \end{array} \right\|.$$

Далее находим  $\theta_0 = \frac{1}{12}$  и строим новый план

$$X_3 = \left\| \begin{array}{cc} 2'_1 & \\ 4/3'_3 & 2/3^*_2 \\ 23/12^*_4 & 1/12'_5 \end{array} \right\|.$$

Итерация IV. Этап 1. Базис плана  $X_3$  треугольный. Определяем

$$u_3 = 0, \quad v_1 = \frac{1}{2} (u_3 + c_{31}) = \frac{5}{2},$$

$$u_2 = 3, \quad v_2 = \frac{4}{3}, \quad u_1 = \frac{5}{3},$$

и далее

$$\Delta_{11} = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \Delta_{32} = -\frac{1}{3}.$$

Критерий оптимальности нарушен, так как  $\Delta_{32} < 0$ .

Этап 2. В базис вводится вектор  $P_{32}(1)$ .

Образуем две цепочки

$$x'_{33} \text{ и } x^*_{22}, \quad x'_{21}, \quad x^*_{31}, \quad x'_{33},$$

с помощью которых определяем матрицу

$$\bar{X}_3 = \left\| \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ -1/3 & 1/3 & \\ 1/3 & & 2/3 \end{array} \right\|.$$

Далее, вычислив  $\theta_0 = \frac{1}{8}$ , строим новый план

$$X_4 = \left\| \begin{array}{cc|c} & 2' & \\ 33/24 & 5/8 & \\ 15/8 & 1/8 & \end{array} \right\|.$$

Итерация V. Этап 1. Базис плана  $X_4$  имеет почти треугольный вид. Замкнутая цепочка из неотмеченных элементов  $x_{31}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{32}$  позволяет найти предварительные потенциалы

$$u_2 = \frac{7}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{2}, \quad v_1 = \frac{11}{4}, \quad v_2 = \frac{3}{2}.$$

По единственному отмеченному элементу вычисляем

$$u_1 = 2.$$

Предварительные потенциалы  $u_i > 0$ . Кроме того,

$$\Delta_{11} = c_{11} - (v_1 - u_1) = \frac{1}{4} > 0.$$

Условия критерия оптимальности выполняются. План  $X_4$  — решение задачи.

## § 6. Об одной модификации распределительной задачи

6.1. Обобщенный метод потенциалов, подробно рассмотренный для задачи типа (1.1)—(1.4), применим к любой распределительной задаче. Если, например, система неравенств (1.2) заменяется на систему равенств (1.5), то отличие состоит лишь в том, что матрицы, определяющие планы задачи, лишены  $(n+1)$ -го столбца. Процесс решения задачи полностью совпадает с описанным выше.

Отметим, что в распределительной задаче, все условия которой — точные равенства, любой базис имеет почти треугольный вид. Как показывает вычислительный опыт, распределительные задачи типа (1.1)—(1.4) чаще всего устроены так, что все текущие базисы имеют треугольный вид. Однако в общем случае такое утверждение несправедливо. В качестве примера можно сослаться на задачу, решенную в предыдущем параграфе.

6.2. Близкой к распределительной является задача размещения заказов и загрузки оборудования (см. [52], п. 2.2 гл. 1), которая представляет собой частный случай модели, требующей максимизации переменной

$$V \quad (6.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_{ij} \geq V a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

К модели (6.1)—(6.4) сводится также задача о наилучшем распределении посевных площадей между культурами, изложенная в § 6 гл. 2. Задача (6.1)—(6.4) может быть решена методом параметрического программирования.

Рассмотрим задачу о максимизации

$$\sum_{i=1}^m x_{i, n+1} \quad (6.5)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_{ij} - x_{i, n+1} = a_i V, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.6)$$

и (6.3), (6.4), где  $V$  — параметр.

Применим к задаче (6.3)—(6.6) алгоритм параметрического программирования, изложенный в [6], § 2 гл. 8 (см. также [11], гл. 3).

Алгоритм представляет собой последовательность итераций метода уточнения оценок со специальным выбором вектора, исключаемого из базиса. В процессе решения мы движемся по оптимальным планам задачи (6.3)—(6.6), увеличивая от шага к шагу значение  $V$ . Отдельная итерация метода уточнения оценок для задачи (6.3)—(6.6) по трудоемкости равнозначна отдельной итерации обобщенного метода потенциалов. Ее реализация связана с решением систем уравнений, матрица которых состоит из векторов условий распределительной задачи. Поэтому алгоритм основывается на соображениях, изложенных в § 2.

Отметим одну интересную особенность задачи (6.1)—(6.4), благодаря которой алгоритм параметрического программирования особенно удобен для ее анализа [32].

**Теорема 6.1.** *Для произвольного  $V$ , при котором задача (6.3)—(6.6) разрешима, базис ее оптимального плана имеет треугольный вид.*

Доказательство теоремы 6.1, вытекающее из соответствующего критерия оптимальности, мы здесь приводить не будем.

Итак, решая задачу (6.1)—(6.4) как задачу параметрического программирования, мы движемся только по планам с треугольным базисом. Соответствующий алгоритм напоминает метод решения транспортной задачи, основанный на последовательном уточнении оценок (§ 3, гл. 6).

**6.3.** В заключение отметим, что обобщенный метод потенциалов рассматривался в работах ряда советских авторов [28, 5, 49].

Алгоритм решения распределительной задачи, базирующийся на методе сокращения невязок, описан в [26]. Изложение метода уточнения оценок применительно к рассматриваемой задаче содержится в работе С. С. Лебедева [25]. Задача (6.1)—(6.4) изучалась впервые в работе [18], где для ее анализа был предложен метод сокращения невязок. Метод решения этой задачи, связанный с параметрическим программированием, рассмотрен в [32].

В настоящей главе вводятся элементы теории транспортных сетей. Приведенные здесь понятия и определения (транспортные сети и их элементы, функции на множестве пунктов сети либо на множестве ее коммуникаций и др.) позволяют формулировать и исследовать ряд экстремальных задач в сетевых терминах.

## § 1. Основные понятия и определения

1.1. В матричных постановках транспортных задач  $T$  и  $T_a$ , изучению которых были посвящены гл. 3—6, предполагается, что в каждой из задач имеются только пункты производства и пункты потребления, причем перевозки от пунктов потребления к пунктам производства невозможны. Как отмечалось в гл. 3, транспортные задачи могут быть изображены графически.

На рис. 8.1 представлено графическое изображение транспортной задачи с двумя пунктами производства и тремя пунктами потребления, в которой каждая пара пунктов производства и потребления соединена коммуникацией. На рис. 8.2 изображена транспортная задача с запретами, в которой существуют пункты производства и пункты потребления, между которыми невозможны перевозки. Однако как в первой, так и во второй задаче коммуникации изображаются стрелками, идущими от пунктов производства к пунктам потребления, что означает запрет перевозок в противоположном направлении. Между тем, если посмотреть на реальную карту железных (или шоссейных) дорог, то сразу же бросится в глаза, что для большинства пунктов имеется возможность как ввозить, так и вывозить продукцию.

Естественно поэтому расширить постановку транспортных задач с тем, чтобы в нее укладывались транспортные модели, система коммуникаций которых имеет,

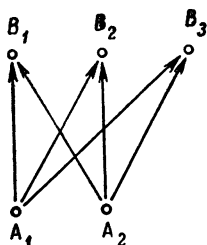


Рис. 8.1.

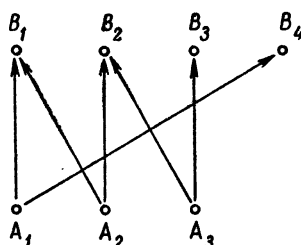


Рис. 8.2.

например, структуру, изображенную на рис. 8.3. Эта система коммуникаций содержит 8 пунктов, из которых только 2 обладают свойством, предполагавшимся в моделях типа  $T$  и  $T_d$ . В пункт  $p_2$  можно только ввозить продукцию, а из  $p_1$  — лишь вывозить ее. Остальные пункты имеют возможность как ввозить, так и вывозить продукцию.

1.2. Введем несколько понятий, в терминах которых легко формулировать интересующие нас расширенные транспортные задачи и некоторые другие модели, близкие к транспортным.

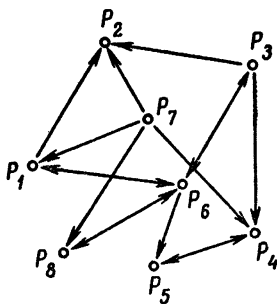


Рис. 8.3.

Основным для этой главы является понятие транспортной сети.

Пусть  $P$  — произвольное конечное множество элементов  $p_i$ ;  $K$  — совокупность некоторых (не обязательно всех) упорядоченных пар  $k_{ij} = (p_i, p_j)$ , каждая из которых составлена из различных элементов множества  $P$ .

Набор двух множеств  $P$  и  $K$  будем называть *транспортной сетью* (или просто сетью)  $(P, K)$  и говорить, что она задается или порождена этими множествами.

Элементы  $p_i$  множества  $P$  называются *пунктами* транспортной сети  $(P, K)$ ; элементы  $k_{ij} = (p_i, p_j)$  множества  $K$  *коммуникациями* сети. Условимся говорить, что коммуникация  $k_{ij}$  связывает пункты  $p_i$  и  $p_j$ , причем начинается в  $p_i$  и заканчивается в  $p_j$ . Таким образом, задать транспортную сеть — это значит указать множество ее пунктов и систему коммуникаций, их связывающих.

Произвольная транспортная сеть может быть изображена графически. Для этого следует отнести каждому пункту сети некоторую точку плоскости, а затем каждую пару точек  $(p_i, p_j)$ , соответствующую коммуникации сети, соединить направленным отрезком, идущим от  $p_i$  к  $p_j$ . Направление отрезка отмечается стрелкой. Если при некоторых  $i$  и  $j$  сеть содержит как коммуникацию  $k_{ij}$ , так и коммуникацию  $k_{ji}$ , которые называются *противоположными*, то отрезок, соединяющий  $p_i$  и  $p_j$ , либо снабжается двумя противоположными стрелками, либо не содержит ни одной стрелки.

На рис. 8.1—8.3 изображены три различные транспортные сети. Каждой упорядоченной паре пунктов сети рис. 8.1 отвечает, как видим, не более одной коммуникации. Сеть, изображенная на рис. 8.3, содержит пункты, которые связаны двумя противоположными коммуникациями (например, пункты  $p_4$  и  $p_5$ ). Как видно из рисунков, коммуникациями связаны не все, а лишь некоторые пункты.

Транспортные сети могут задаваться также с помощью матриц.

Допустим, что сеть  $(P, K)$  содержит  $N$  пунктов. Рассмотрим квадратную матрицу  $A$  порядка  $N$ , элементы  $a_{ij}$  которой вычисляются согласно правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммуникация } k_{ij} \in K, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица  $A$  однозначно определяет породившую ее транспортную сеть  $(P, K)$  и называется матрицей этой сети. Например, матрицы  $A'$  и  $A''$  сетей, изображенных

на рис. 8.2 и 8.3, имеют вид

$$A' = \begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{matrix}, \quad A'' = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

Просматривая строку матрицы  $A'$  или  $A''$ , можно выяснить, в какие пункты допускается транспортировка из пункта, соответствующего данной строке. Столбцы матриц позволяют выявить коммуникации, заканчивающиеся в фиксированных пунктах. На главной диагонали матрицы транспортной сети всегда стоят нули, так как по определению не существует коммуникаций, которые начинаются и заканчиваются в одном и том же пункте.

Характерной особенностью матрицы  $A'$  является то, что ее строки, отвечающие пунктам потребления, и столбцы, соответствующие пунктам производства, состоят из одних нулей. Очевидно, та же особенность присуща матрице любой транспортной сети, у которой нет пунктов, являющихся одновременно началом и концом различных коммуникаций. Такие сети можно задавать с помощью прямоугольных матриц размером  $m \times n$ , где  $m + n = N$ . Строки матрицы отвечают началам коммуникаций, а столбцы — концам коммуникаций. Например, транспортную сеть рис. 8.2 можно изобразить не только матрицей  $A'$ , но и более экономным способом, используя матрицу

$$A''' = \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

Следует отметить, что при ручном счете графическое изображение транспортной сети, позволяющее

апеллировать к наглядности и использовать интуицию, в общем случае безусловно предпочтительнее матричных способов задания сети.

### 1.3. Рассмотрим последовательность коммуникаций

$$k_{i_1 j_1}, k_{i_2 j_2}, \dots, k_{i_s j_s} \quad (1.1)$$

некоторой транспортной сети  $(P, K)$ .

Если каждая пара коммуникаций (1.1), стоящих рядом, имеет один общий пункт, а остальные пары коммуникаций не содержат общих пунктов, то последовательность коммуникаций (1.1) называется *маршрутом*.

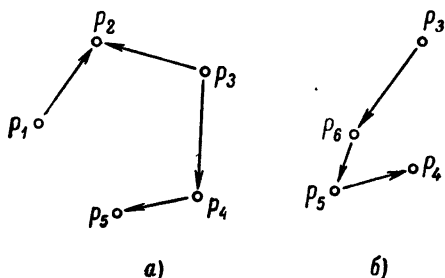


Рис. 8.4.

Условимся говорить, что маршрут (1.1) проходит через пункты, связанные его коммуникациями  $k_{i_\lambda j_\lambda}$ . Каждая из крайних коммуникаций маршрута (1.1) —  $k_{i_1 j_1}$  и  $k_{i_s j_s}$  — содержит по одному пункту, не входящему в состав других коммуникаций маршрута. Эти два пункта называются *крайними пунктами* маршрута. Если  $p_i$  и  $p_j$  являются крайними пунктами некоторого маршрута, то говорят, что они связываются этим маршрутом.

Если маршрут проходит через некоторый пункт, не являющийся крайним, то этот пункт входит в состав двух коммуникаций маршрута. Из определения маршрута следует, что его геометрическим образом является незамкнутая ломаная линия, которая не проходит дважды ни через одну из своих вершин. На рис. 8.4 приведено два маршрута транспортной сети, изображенной на рис. 8.3. Каждая из систем коммуникаций, изображен-

ных на рис. 8.5 (а) и б)) не образует маршрута, так как каждая из них проходит через пункты, входящие более чем в две коммуникации (пункты  $p_2$  и  $p_7$ ).

В определении маршрута, связывающего пункты  $p_i$  и  $p_j$ , требуется, чтобы  $p_i \neq p_j$ . Предположим теперь, что  $p_i = p_j$ . Соответствующая последовательность коммуникаций называется *замкнутым маршрутом*. Очевидно, каждый пункт, через который проходит замкнутый маршрут, содержится в двух соседних коммуникациях маршрута (и только в них).

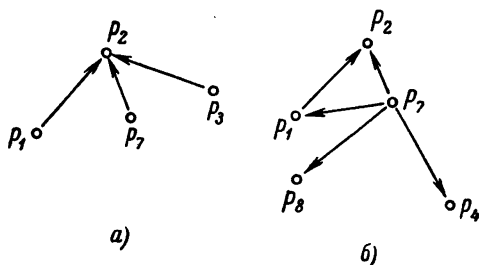


Рис. 8.5.

Примеры замкнутых маршрутов изображены на рис. 8.6.

Если в любом пункте маршрута  $l$ , не являющемся крайним, одна коммуникация начинается, а другая заканчивается, то маршрут  $l$  называют *направленным маршрутом*.

Крайний пункт направленного маршрута, в котором начинается (заканчивается) одна из его коммуникаций, называется *началом (концом)* маршрута.

Аналогично определяется *направленный замкнутый маршрут*. Каждый пункт этого маршрута является концом одной его коммуникации и началом другой.

Пример направленного маршрута изображен на рис. 8.4, б. Направленный замкнутый маршрут представлен на рис. 8.6, а.

Транспортная сеть, порожденная некоторыми подмножествами множеств  $P$  и  $K$ , называется *подсетью* транспортной сети  $(P, K)$ .

Транспортную сеть называют *связной*, если любая пара ее пунктов может быть связана с помощью некоторого маршрута этой сети.

Связная подсеть транспортной сети  $(P, K)$  называется *максимальной*, если она содержит вместе с любым

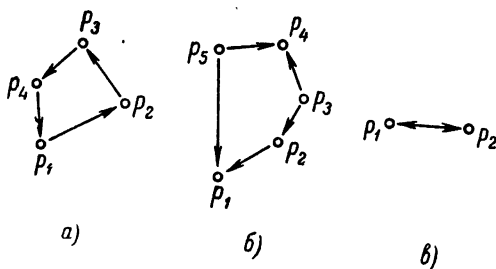


Рис. 8.6.

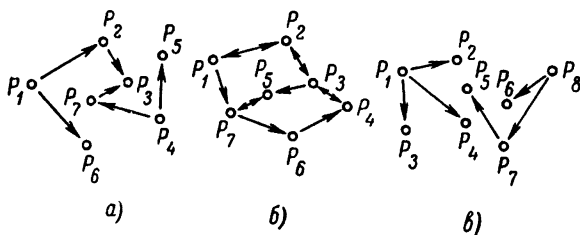


Рис. 8.7.

пунктом  $p_i$  пункт  $p_j \in P$ , связанный с  $p_i$  некоторой коммуникацией  $k_{ij} \in K$ , а также все коммуникации множества  $K$ , которые соединяют пункты подсети.

Легко проверить, что любая транспортная сеть единственным образом разбивается на конечное число максимальных связных подсетей.

На рис. 8.7 изображены примеры связных и несвязных сетей.

Если каждая пара пунктов транспортной сети может быть связана направленным маршрутом, то сеть называют *направленно связной*. Очевидно, любая направленно связная сеть является связной. Обратное утверждение неверно: существуют связные сети, не являющиеся на-

правленно связными. Соответствующим примером служит сеть, изображенная на рис. 8.7, а. Сеть рис. 8.7, б является направленно связной.

Следует отметить, что введенное понятие транспортной сети является частным случаем понятия графа, широко используемого в различных приложениях. Поскольку наши интересы ограничены транспортными приложениями графов, мы сочли целесообразным увязать необходимую терминологию с сущностью именно этих приложений. В дальнейшем термин граф не употребляется, и все необходимые результаты теории графов формулируются и доказываются применительно к транспортным сетям.

## § 2. Функции на сети

2.1. Рассмотрим ряд функций, определенных на множестве пунктов сети, либо на множестве ее коммуникаций.

Пусть  $f(p_i)$  — действительная функция пунктов  $p_i \in P$ ;  $g(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , — действительная функция, определенная на множестве коммуникаций  $K$ .

Введем следующие обозначения для сумм значений этих функций, которые удобно использовать при анализе ряда задач теории транспортных сетей:

$$f(P') = \sum_{p_i \in P'} f(p_i) \text{ — сумма значений функции } f \text{ на множестве пунктов } P' \subset P;$$

$$g(P', P'') = \sum_{\substack{p_i \in P' \\ p_j \in P''}} g(k_{ij}) \text{ — сумма значений функции } g$$

на множестве всех коммуникаций, начинающихся в одном из пунктов множества  $P' \subset P$  и заканчивающихся в пунктах множества  $P'' \subset P$ .

Отметим очевидные свойства введенных обозначений.

Если  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$  — подмножества множества  $P$ , причем  $P''$  и  $P'''$  не имеют общих пунктов ( $P'' \cap P''' = \emptyset$ ), то

$$f(P' \cup P''') = f(P') + f(P'''), \quad (2.1)$$

$$g(P', P'' \cup P''') = g(P', P'') + g(P', P'''), \quad (2.2)$$

$$g(P'' \cup P''', P') = g(P'', P') + g(P''', P'). \quad (2.3)$$

Напомним, что  $P'' \cup P''' (P'' \cap P''')$  — множество пунктов, принадлежащих множеству  $P''$  или множеству  $P'''$  (принадлежащих и  $P''$ , и  $P'''$ ).

Перечислим несколько функций, которые обычно фигурируют в задачах, связанных с транспортными сетями.

**2.2.** Функция производства и потребления  $q(p_i)$  задается на множестве  $P$  всех пунктов сети  $(P, K)$ . Если  $q_i = q(p_i) > 0$ , то пункт  $p_i$  называется *пунктом производства*; при  $q_i = q(p_i) < 0$  пункт  $p_i$  называется *пунктом потребления*. Пункт  $p_i$ , для которого  $q_i = q(p_i) = 0$ , называют *перевалочным пунктом*.

Смысл функций  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , очевиден. Число  $q(p_i)$  равно объему производства однородного продукта в пункте  $p_i$  при  $q(p_i) > 0$ , величине потребления однородного продукта в пункте  $p_i$ , взятой со знаком минус, при  $q(p_i) < 0$ . Нулевое значение  $q(p_i)$  указывает на то, что в пункте  $p_i$  отсутствует как производство, так и потребление продукта. Иногда множества пунктов производства, потребления и перевалочных пунктов будут обозначаться через  $P_+$ ,  $P_-$  и  $P_0$  соответственно.

**2.3.** Функция пропускных способностей коммуникаций  $d(k_{ij}) \geq 0$  задается на множестве  $K$  коммуникаций транспортной сети  $(P, K)$ . Значение функции пропускных способностей на коммуникации  $k_{ij}$  равно предельному количеству продукта, которое может быть перевезено по этой коммуникации. Число  $d_{ij} = d(k_{ij})$  называется пропускной способностью коммуникации  $k_{ij}$ . Если вдоль данной коммуникации может быть перевезено любое количество продукта, то ее пропускная способность полагается равной бесконечности ( $\infty$ ). Если сеть  $(P, K)$  не содержит коммуникацию, идущую из пункта  $p_\lambda$  в пункт  $p_\mu$ , то можно условно считать, что  $k_{\lambda\mu} \in K$ , но  $d_{\lambda\mu} = d(k_{\lambda\mu}) = 0$ .

**2.4.** Рассмотрим сеть  $(P, K)$ , на множестве коммуникаций которой определена функция пропускных способностей  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ . Выделим два пункта сети  $p_i$  и  $p_N$ ;  $p_i$  назовем источником, а  $p_N$  — стоком. Пусть  $E'_i$  — множество коммуникаций сети, исходящих из пункта  $p_i$ , а  $E''_N$  — множество тех коммуникаций сети, которые заканчиваются в пункте  $p_N$ .

Функция  $x_{ij} = x(k_{ij})$  определенная на множестве  $K$ , для которой имеют место соотношения

$$\sum_{k_{ij} \in E'_i} x(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E''_i} x(k_{ji}) = 0 \text{ для всех } i \neq 1, N, \quad (2.4)$$

$$x_1 = \sum_{k_{i1} \in E'_1} x(k_{i1}) - \sum_{k_{j1} \in E''_1} x(k_{j1}) \geq 0, \quad (2.5)$$

$$0 \leq x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K, \quad (2.6)$$

называется *поток на сети*  $(P, K)$ , совместимым с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , и направленным из  $p_1$  в  $p_N$ . Складывая соотношения (2.4), (2.5) и равенство

$$x_N = \sum_{k_{Nj} \in E'_N} x(k_{Nj}) - \sum_{k_{jN} \in E''_N} x(k_{jN}),$$

получаем

$$x_1 + x_N = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{k_{ij} \in E'_i} x(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E''_i} x(k_{ji}) \right). \quad (2.7)$$

Любая коммуникация исходит из одного пункта сети и заканчивается в другом. Поэтому величина  $x(k_{ij})$  при произвольных  $i$  и  $j$  входит в правую часть (2.7) дважды: один раз со знаком плюс, а другой — со знаком минус, т. е.

$$x_1 + x_N = 0. \quad (2.8)$$

Будем называть число  $x_1 = -x_N \geq 0$  *величиной потока*  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ . Смысл введенных терминов может быть пояснен следующим образом. Представим себе, что сеть  $(P, K)$  является сетью каналов с единственным источником  $p_1$  и единственным стоком  $p_N$ . Пусть канал, отвечающий коммуникации  $k_{ij}$ , способен пропускать не более  $d_{ij}$  единиц жидкости в единицу времени.

В таком случае функция  $x(k_{ij})$ , удовлетворяющая условиям (2.4) — (2.6), определяет скорости протекания жидкости в каждом канале;  $x_1$  — скорость притока жидкости в источник  $p_1$ ,  $-x_N$  — скорость отвода жидкости в стоке  $p_N$  (речь идет об установившемся режиме). Равенство (2.8) с точки зрения приведенной интерпретации очевидно: количество жидкости, поступающее в единицу

времени из источника, равно количеству жидкости, уходящей за это же время в сток.

Введенная функция  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , неотрицательна, вследствие чего ее иногда называют *арифметическим* потоком.

При выяснении различных свойств потока часто оказывается более удобным использовать понятие алгебраического потока, составляющие которого не ограничены условием неотрицательности. Пусть  $x(k_{ij})$  — арифметический поток. Положим для любых двух пунктов  $p_i$  и  $p_j$ , связанных коммуникацией сети,

$$x'_{ij} = x'(k_{ij}) = x(k_{ij}) - x(k_{ji}). \quad (2.9)$$

Если одна из противоположных коммуникаций  $k_{ij}$  и  $k_{ji}$ , участвующих в равенстве (2.9), не содержится в  $K$ , то значение потока на ней полагается равным нулю.

Поскольку  $x(k_{ij}) \leq d_{ij}$ ,  $x(k_{ji}) \geq 0$  и  $x(k_{ij}) = 0$  при  $k_{ij} \notin K$ , то

$$x'(k_{ij}) \leq d_{ij}, \text{ если } k_{ij} \in K; \quad (2.10)$$

$$x'(k_{ij}) \leq 0, \text{ если } k_{ij} \notin K, \text{ но } k_{ji} \in K. \quad (2.11)$$

Расширим множество  $K$ , введя в него коммуникации  $k_{ji} \notin K$ , если только  $k_{ij} \in K$ . Новое множество коммуникаций обозначим через  $K'$  и будем называть расширением множества  $K$ . Значения функции  $d(k_{ij})$  для вновь введенных коммуникаций полагаются равными нулю.

Ограничения (2.10), (2.11) могут быть теперь записаны в однотипной форме

$$x'(k_{ij}) \leq d(k_{ij}) \text{ при } k_{ij} \in K'. \quad (2.12)$$

Очевидно,

$$x'(k_{ij}) = -x'(k_{ji}). \quad (2.13)$$

Учитывая (2.13), можно переписать условия (2.4), (2.5) в более компактном виде

$$\sum_{k_{ij} \in E_i} x'(k_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq 1, N, \\ x_1 \geq 0, & i = 1, \\ x_N \leq 0, & i = N, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $E_i = E'_i + E''_i$ .

Последнее условие системы (2.14) является следствием остальных и приведено для симметрии. Функция  $x'(k_{ij})$ , определенная на множестве коммуникаций  $K'$  и удовлетворяющая условиям (2.12) — (2.14), называется *алгебраическим* потоком, совместимым с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ .

Как только что было показано, каждому арифметическому потоку отвечает алгебраический поток, совместимый с той же функцией пропускных способностей. Нетрудно проверить, что верно и обратное: произвольный алгебраический поток порождает арифметический поток, причем оба потока совместимы с одной и той же функцией пропускных способностей. Действительно, пусть  $x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , — алгебраический поток, совместимый с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ .

Положим для  $k_{ij} \in K$

$$x(k_{ij}) = \begin{cases} x'(k_{ij}) & \text{при } x'(k_{ij}) \geq 0, \\ 0 & \text{при } x'(k_{ij}) < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Из (2.12) следует условие (2.6). Соотношения (2.13), (2.14) приводят к условиям (2.4), (2.5). Следовательно, функция  $x(k_{ij})$  действительно является арифметическим потоком, совместимым с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ .

Если некоторые пункты сети связаны двумя противоположными коммуникациями, то, очевидно, алгебраический поток может порождать бесконечно много арифметических потоков. Однако при дополнительном предположении о том, что на одной из противоположных коммуникаций значение арифметического потока равно нулю (соотношение (2.15) подчиняется этому требованию), соответствие между арифметическим и алгебраическим потоками становится взаимно однозначным.

2.5. Допустим, что на множестве  $P$  пунктов сети  $(P, K)$  задана функция производства и потребления  $q(p_i)$ , а на множестве  $K$  коммуникаций сети определена функция пропускных способностей  $d(k_{ij})$ .

Функция  $x(k_{ij})$ , определенная на множестве коммуникаций  $K$ , для которой справедливы соотношения

$$\sum_{k_{ij} \in E_i'} x(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E_i''} x(k_{ji}) = q(p_i) \text{ для всех } p_i \in P, \quad (2.16)$$

$$0 \leq x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad (2.17)$$

называется *планом перевозок*, совместимым с функцией производства и потребления  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , и функцией пропускных способностей коммуникаций  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ . Складывая равенства (2.16) и учитывая, что каждая перевозка  $x(k_{ij})$  входит в левую часть суммарного соотношения дважды с разными знаками, получаем

$$\sum_{p_i \in P} q(p_i) = q(P) = 0. \quad (2.18)$$

Равенство (2.18), называемое условием баланса, означает, что суммарный объем производства пунктов сети равен суммарному объему потребления этих пунктов. Как было только что показано, соотношение (2.18) является необходимым условием существования плана, совместимого с функцией производства и потребления  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ .

В соответствии с условиями (2.16) и (2.17) план перевозок  $x(k_{ij})$ , совместимый с  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , и  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , представляет собой набор перевозок по коммуникациям сети, который позволяет удовлетворить запросы всех пунктов потребления за счет возможностей пунктов производства данной сети, не выходя за пределы пропускных способностей ее коммуникаций. Как и в случае потоков, системы перевозок могут задаваться либо в виде арифметических планов, либо в виде алгебраических планов.

Введенная только что функция является *арифметическим* планом перевозок, так как  $x(k_{ij}) \geq 0$ .

Иногда оказывается более удобным оперировать с алгебраическими планами перевозок.

Функция  $x'(k_{ij})$ , определенная на множестве коммуникаций  $K'$  и удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k_{ij} \in E_i} x'(k_{ij}) = q(p_i), \quad p_i \in P, \quad (2.19)$$

$$x'(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K', \quad (2.20)$$

$$x'(k_{ij}) = -x'(k_{ji}), \quad k_{ij} \in K', \quad (2.21)$$

называется *алгебраическим* планом перевозок, совместимым с функциями  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , и  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ . Обозначения  $E_i$  и  $K'$  имеют здесь тот же смысл, что и при опре-

деления алгебраического потока, причем, как и прежде,  $d(k_{ij})=0$ , если  $k_{ij} \notin K$ .

Как и для случая потоков, нетрудно убедиться, что формулы (2.9) и (2.15) устанавливают соответствие между арифметическими и алгебраическими планами, являющимися различными обозначениями одной и той же системы перевозок.

2.6. В дальнейшем нам придется сравнивать планы перевозок с точки зрения транспортных затрат, связанных с их реализацией. Для этой цели служит функция транспортных расходов  $c(k_{ij}) \geq 0$ , определенная на множестве  $K$  коммуникаций сети  $(P, K)$ . Значение функции  $c(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , на коммуникации  $k_{ij}$  равно стоимости перевозки единицы однородного продукта вдоль  $k_{ij}$ . Число  $c_{ij} = c(k_{ij})$  будем иногда называть величиной транспортных расходов коммуникации  $k_{ij}$ . Функции  $d(k_{ij})$ ,  $x(k_{ij})$  и  $c(k_{ij})$ , определенные на множествах коммуникаций, могут задаваться либо непосредственно на транспортной сети, либо в виде квадратных матриц порядка  $N$  ( $N$  равно числу пунктов сети  $(P, K)$ ).

Если  $k_{ij} \in K$  (или  $k_{ij} \in K'$ , если речь идет об алгебраических потоках и планах перевозок), то на пересечение  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы помещается значение соответствующей функции на коммуникации  $k_{ij}$ . В противном случае эта позиция матрицы заполняется нулем для функций  $d(k_{ij})$  и  $x(k_{ij})$  и бесконечностью  $(\infty)$  для функции  $c(k_{ij})$ .

Таким образом, введенные функции коммуникаций сети можно считать определенными для каждой коммуникации независимо от того, входит или не входит она в множество  $K$ . При этом распространение функции на коммуникации  $k_{ij} \notin K$  осуществляется указанным выше способом. Функции, заданные на множестве коммуникаций, и отвечающие им матрицы будут иногда обозначаться соответствующими большими буквами  $(D, X, C)$ .

В настоящей главе рассматриваются постановка и методы решения задачи о выборе наиболее экономного маршрута, имеющей много практических приложений.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольную транспортную сеть  $(P, K)$ , на множестве коммуникаций которой определена неотрицательная функция транспортных расходов  $c(k_{ij}) = c_{ij}$ ,  $k_{ij} \in K$ . Поставим в соответствие каждому направленному маршруту

$$l = (k_{i_1 i_2}, k_{i_2 i_3}, \dots, k_{i_{s-2} i_{s-1}}, k_{i_{s-1} i_s})$$

сети  $(P, K)$  стоимость перевозки по нему единицы однородного продукта, равную

$$c(l) = c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + \dots + c_{i_{s-2} i_{s-1}} + c_{i_{s-1} i_s}.$$

Назовем число  $c(l)$  *величиной транспортных расходов маршрута  $l$* . Задача о выборе наиболее экономного маршрута состоит в отыскании маршрута  $l^*$ , начинающегося и заканчивающегося в фиксированных пунктах сети, которому отвечает минимальное значение величины транспортных расходов по сравнению с остальными направленными маршрутами, связывающими данные пункты в заданном направлении. Маршрут  $l^*$  называется *оптимальным*.

Конкретная интерпретация сформулированной задачи определяется физическим смыслом функции  $c(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ .

Если  $c(k_{ij})$  — длина коммуникации  $k_{ij}$ , то задача о наиболее экономном маршруте превращается в задачу об отыскании кратчайшего маршрута между двумя пунктами, которая известна под названием *задачи о кратчайшем пути*. Если  $c(k_{ij})$  — время, затрачиваемое на переезд из пункта  $p_i$  в пункт  $p_j$ , то рассматриваемая задача состоит в определении маршрута, следуя которому можно попасть из одного фиксированного пункта в другой за минимальное время.

Задача о выборе наиболее экономного маршрута имеет не только транспортные приложения. Одна из наиболее важных задач так называемой системы сетевого планирования (см. [17]) состоит в определении критических путей, т. е. последовательностей работ, ограничивающих выполнение заказа по некоторому фактору (по времени, по затратам, по тому или иному ресурсу). Задача отыскания критического пути сводится к выбору наименее экономного маршрута транспортной сети, связывающего два ее пункта. Последняя задача, определяемая функцией  $C$ , эквивалентна задаче о наиболее экономном маршруте, определяемой функцией  $-C^*$ ).

Задача о наиболее экономном маршруте представляет не только самостоятельный интерес, который связан с перечисленными конкретными постановками. Она важна еще и потому, что входит составной частью в ряд более сложных сетевых задач. В литературе описано большое число различных методов решения задачи о выборе наиболее экономного маршрута. Обзор некоторых из них можно найти в работе [36].

В настоящей главе приводятся два алгоритма. Первый алгоритм позволяет связать оптимальными маршрутами фиксированный пункт сети со всеми остальными ее пунктами; второй — приспособлен для одновременного построения оптимальных маршрутов между любыми двумя пунктами сети.

---

\*) Хотя методы решения задачи о наиболее экономном маршруте приспособлены к неотрицательным функциям транспортных расходов, особенности сетей, формируемых в системе сетевого планирования (они не содержат направленных замкнутых маршрутов), позволяют не считаться с этим допущением (см. п. 3.4).

## § 2. Метод Минти

2.1. Пусть  $p_1$  — произвольный пункт сети  $(P, K)$ . Требуется для любого пункта  $p_s \in P$  найти оптимальный маршрут, идущий от  $p_1$  к  $p_s$ . Способ решения сформулированной задачи, описываемый ниже, предложен Минти [33]. Процесс решения складывается из конечного числа элементарных шагов. Каждый шаг состоит в расширении множества отмеченных пунктов сети и выделении некоторых ее коммуникаций. Решение задачи начинается с отметки пункта  $p_1$ , которому сопоставляется число 0. Допустим, что уже проделан ряд шагов алгоритма, в результате которых отмечены некоторые пункты сети, причем каждому из них сопоставлено определенное число  $h_\lambda$ , где  $\lambda$  — номер соответствующего пункта. Очередной шаг алгоритма состоит в следующем. Рассмотрим все те еще не отмеченные пункты сети, которые являются концами коммуникаций, начинающихся в одном из отмеченных ее пунктов. Для каждой такой коммуникации  $k_{\lambda\mu}$  вычислим сумму числа  $h_\lambda$ , отвечающего отмеченному пункту  $p_\lambda$ , и величины ее транспортных расходов  $c(k_{\lambda\mu})$ . Выделим далее те из рассмотренных коммуникаций, которым соответствует минимальное значение суммы. При этом следует учесть, что из нескольких коммуникаций, подлежащих выделению и заканчивающихся в одном пункте, выделяется только одна (все равно какая). Концы выделенных коммуникаций отмечаются, причем каждому из них сопоставляется минимальное значение суммы. На этом шаг заканчивается. Процесс длится до тех пор, пока на очередном шаге оказывается невозможным дальнейшее расширение множества отмеченных пунктов. По построению в каждом из отмеченных пунктов (кроме  $p_1$ ) заканчивается единственная выделенная коммуникация. Поэтому движение от любого отмеченного пункта  $p_s$  по выделенным коммуникациям (в направлении, противоположном их ориентации) осуществляется однозначно. Начало выделенной коммуникации отмечается раньше ее конца. Следовательно, последовательность выделенных коммуникаций, образованная в процессе движения от пункта  $p_s$ , составляет маршрут  $l_{p_1 p_s}^*$  с началом в

пункте  $p_1$  и концом в пункте  $p_s$ . Покажем, что маршрут  $l_{p_1 p_s}^*$  является оптимальным, т. е. связан с наименьшей величиной транспортных расходов по сравнению с другими маршрутами, идущими из  $p_1$  в  $p_s$ . При этом величина транспортных расходов маршрута  $l_{p_1 p_s}^*$  равна  $h_s$  — числу, отвечающему пункту  $p_s$ .

Воспользуемся индукцией по номеру  $t$  шага, на котором был отмечен пункт  $p_s$ . Если  $t = 0$ , т. е.  $p_s = p_1$ , то утверждение очевидно. Пусть оно верно для всех пунктов, отмеченных не более чем за  $r$  шагов. Докажем, что при  $t = r + 1$  оно также имеет место. Рассмотрим произвольный маршрут  $l_{p_1 p_s}$ , идущий от  $p_1$  к  $p_s$ . Введем множество пунктов  $P_r$ , отмеченных в результате  $r$  шагов. По условию  $p_s \in P_{r+1}$ ,  $p_s \notin P_r$ . Очевидно, маршрут  $l_{p_1 p_s}$  обязан содержать коммуникацию  $k_{\alpha\beta}$  такую, что  $p_\alpha \in P_r$ , а  $p_\beta \notin P_r$ .

В соответствии с алгоритмом

$$h_\alpha + c_{\alpha\beta} \geq h_{s'} + c_{s's}, \quad (2.1)$$

где  $s'$  — начало выделенной коммуникации, заканчивающейся в  $p_s$ .

По предположению индукции  $h_\alpha$  — величина транспортных расходов оптимального маршрута из  $p_1$  в  $p_\alpha$ . Следовательно, учитывая неотрицательность величин  $c_{ij}$ , получаем

$$c(l_{p_1 p_s}) \geq h_\alpha + c_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

По той же причине части маршрута  $l_{p_1 p_s}^*$  от  $p_1$  до  $p_{s'} \in P_r$  отвечает величина транспортных расходов, равная  $h_{s'}$ , и значит,

$$c(l_{p_1 p_s}^*) = h_{s'} + c_{s's}. \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.1), (2.2) и (2.3), приходим к искомым соотношениям

$$h_s = h_{s'} + c_{s's} = c(l_{p_1 p_s}^*) \leq c(l_{p_1 p_s}),$$

доказывающим наше утверждение для  $t = r + 1$ . Таким образом, утверждение установлено для любого значения параметра  $t$ .

Если некоторый пункт  $p_\lambda$  не попал в число отмеченных, то это указывает на невозможность сформировать направленный маршрут сети, начинающийся в  $p_1$  и заканчивающийся в  $p_\lambda$ . Действительно, пусть  $P_\infty$  — полное множество отмеченных пунктов. Из наличия маршрута  $l_{p_1 p_\lambda}$  вытекает существование коммуникации, начинающейся в пункте множества  $P_\infty$  и заканчивающейся в не отмеченном пункте. Но в таком случае  $P_\infty$  не является полным множеством отмеченных пунктов. Полученное противоречие служит доказательством нашего утверждения.

2.2. Применяя описанный алгоритм к конкретным задачам, полезно учесть следующие замечания.

1. Может случиться, что оптимальные маршруты, исходящие из пункта  $p_1$ , должны быть протянуты не во все пункты сети, а лишь в те пункты, которые составляют множество  $P' \subset P$ . В таком случае процесс решения длится, естественно, лишь до тех пор, пока будут отмечены все пункты множества  $P'$  либо образуется полное множество отмеченных пунктов.

2. Алгоритм приспособлен для построения единственного оптимального маршрута между пунктами  $p_1$  и  $p_s$ . Однако в ряде случаев оказывается полезным выявить все оптимальные маршруты, соединяющие пункт  $p_1$  с пунктом  $p_s$ . Этого можно добиться с помощью незначительной корректировки алгоритма. Если минимум суммы  $h_\alpha + c_{\alpha\mu}$  достигается на нескольких коммуникациях, заканчивающихся в одном пункте, то все они подлежат выделению. Можно проверить, что любой оптимальный маршрут состоит из выделенных коммуникаций. Следовательно, построение всех оптимальных маршрутов, идущих из  $p_1$  к  $p_s$ , сводится к составлению всех маршрутов транспортной подсети  $(P, K_1)$ , связывающих  $p_1$  и  $p_s$ , где  $K_1$  — множество выделенных коммуникаций.

2.3. Проиллюстрируем описанный алгоритм решения задачи о выборе наиболее экономного маршрута на примере транспортной сети, изображенной на рис. 9.1.

Величины  $c_{ij}$  транспортных расходов коммуникаций показаны на рисунке, причем выделение коммуникаций фиксируется с помощью кружков, содержащих соответ-

ствующие  $c_{ij}$ . Цифры, стоящие в скобках около наименований пунктов, обозначают величину  $h_\lambda$  транспортных расходов оптимального маршрута, связывающего этот пункт с  $p_1$  (первая цифра), и номер шага, на котором пункт был отмечен (вторая цифра).

Таким образом, на рис. 9.1 отражена вся последовательность решения задачи.

На первом шаге был отмечен пункт  $p_3$ ; на втором —  $p_2$ . На каждом из двух последующих шагов отмечалось

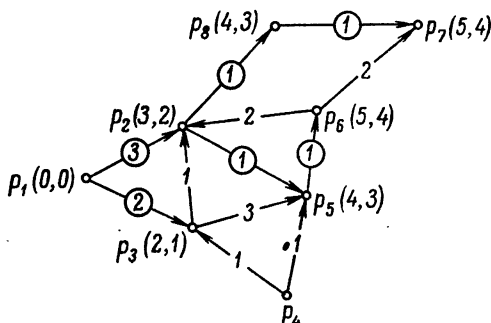


Рис. 9.1.

по два пункта:  $p_8$  и  $p_5$  на третьем шаге,  $p_6$  и  $p_7$  на четвертом. Приведем, например, описание третьего шага. Множество пунктов, отмеченных на первых двух шагах, состоит из  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Просмотру подлежат коммуникации  $k_{28}$ ,  $k_{25}$ ,  $k_{35}$ . Вычисляем отвечающие им суммы

$$h_2 + c_{28} = 4,$$

$$h_2 + c_{25} = 4,$$

$$h_3 + c_{35} = 5.$$

Минимальное значение суммы 4; отмечаем пункты  $p_8$  и  $p_5$ , помещая около них цифры 4 и 3 (номер шага); выделяем коммуникации  $k_{28}$  и  $k_{25}$ .

Полное множество отмеченных пунктов получено за четыре шага и состоит из всех пунктов сети, кроме  $p_4$ . Следовательно, любой пункт сети, кроме  $p_4$ , может быть соединен с  $p_1$  направленным маршрутом, исходящим

из  $p_1$ . Оптимальные маршруты строятся с помощью выделенных коммуникаций. Например, оптимальный маршрут, отвечающий пункту  $p_6$ , проходит через пункты  $p_5$  и  $p_2$ .

### § 3. Метод Беллмана—Шимбела

**3.1.** Алгоритм решения задачи о наиболее экономном маршруте, излагаемый в этом пункте, был предложен почти одновременно Беллманом и Шимбелом [1 и 48]. Он рассчитан на одновременное определение оптимальных маршрутов между любыми двумя пунктами транспортной сети  $(P, K)$  и основывается на идеях динамического программирования.

Запишем функцию транспортных расходов  $c(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , в виде квадратной матрицы  $C$ , порядок которой равен числу  $N$  пунктов сети. Напомним, что на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $C$  помещается число

$$c_{ij} = \begin{cases} c(k_{ij}), & \text{если } i \neq j \text{ и } k_{ij} \in K, \\ 0, & \text{если } i = j, \\ \infty, & \text{если } i \neq j \text{ и } k_{ij} \notin K. \end{cases}$$

Условимся говорить, что маршрут, составленный из  $s$  коммуникаций, имеет длину  $s$ . Назовем *s-оптимальным* такой направленный маршрут из  $p_i$  в  $p_j$  длины не более  $s$ , который связан с минимальными расходами по сравнению со всеми другими направленными маршрутами из  $p_i$  в  $p_j$ , имеющими длину не более чем  $s$ . В этих терминах элементы матрицы  $C$  — величины транспортных расходов 1-оптимальных маршрутов.

Введем в рассмотрение матрицу  $C^{(s)} = \|c_{ij}^{(s)}\|_N$  транспортных расходов для  $s$ -оптимальных маршрутов. Как обычно, на диагонали  $C^{(s)}$  стоят нули, а бесконечные элементы указывают на отсутствие маршрута длины не более чем  $s$ , связывающего соответствующие пункты. Согласно обозначению  $C = C^{(1)}$ . В основе алгоритма лежит простое соотношение

$$c_{ij}^{(m+n)} = \min_{1 \leq \lambda \leq N} (c_{i\lambda}^{(m)} + c_{\lambda j}^{(n)}), \quad (3.1)$$

позволяющее вычислять элементы матрицы  $C^{(m+n)}$  по

элементам матриц  $C^{(m)}$  и  $C^{(n)}$ . Для обоснования равенства (3.1) заметим, что маршрут, составленный из  $m$ -оптимального маршрута из  $p_i$  в  $p_\lambda$  и  $n$ -оптимального маршрута из  $p_\lambda$  в  $p_j$ , имеет длину, не превышающую  $n + m$ . Следовательно,

$$c_{ij}^{(m+n)} \leq \min_{1 \leq \lambda \leq N} (c_{i\lambda}^{(m)} + c_{\lambda j}^{(n)}). \quad (3.2)$$

Здесь использовано предположение о неотрицательности элементов матрицы  $C$ .

Пусть  $(m+n)$ -оптимальный маршрут из  $p_i$  в  $p_j$  проходит через пункт  $p_\alpha$ , причем длина части маршрута от  $p_i$  до  $p_\alpha$  не превосходит  $m$ , а длина его части от  $p_\alpha$  до  $p_j$  менее либо равна  $n$ . В таком случае

$$c_{ij}^{(m+n)} \geq c_{i\alpha}^{(m)} + c_{\alpha j}^{(n)}. \quad (3.3)$$

Сравнивая (3.2) и (3.3), получаем (3.1). Поскольку длина любого маршрута транспортной сети  $(P, K)$  не превосходит  $N - 1$ , где  $N$  — число пунктов множества  $P$ , то при  $s \geq N - 1$

$$C^{(s)} = C^*. \quad (3.4)$$

Здесь под  $C^*$  подразумевается матрица транспортных расходов для различных оптимальных маршрутов. Равенство (3.4) может иметь место и для меньших значений параметра  $s$ .

Алгоритм отыскания оптимальных маршрутов для всех пар пунктов сети состоит в построении последовательности матриц  $\{C^{(s_k)}\}_k$ , последний элемент которой равен  $C^*$ . Матрица  $C^*$  позволяет далее легко определить каждый из оптимальных маршрутов.

В соответствии с формулой (3.1)

$$c_{ij}^{(2k)} = \min_{1 \leq \lambda \leq N} (c_{i\lambda}^{(k)} + c_{\lambda j}^{(k)}). \quad (3.5)$$

Пользуясь соотношением (3.5), можно последовательно формировать матрицы

$$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(4)}, C^{(8)}, \dots, C^{(2^{k-1})}, C^{(2^k)}, \dots \quad (3.6)$$

Выбор именно такой последовательности матриц  $C^{(s)}$  вызван стремлением получить наибо́льший рост параметра  $s$ .

Элементы последовательности (3.6) вычисляются до тех пор, пока при некотором  $d$  будут получены две равные соседние матрицы

$$C^{(2^d)} = C^{(2^{d+1})}. \quad (3.7)$$

Очевидно, равенство (3.7) эквивалентно (3.4) при  $s=2^d$ . Итак, матрица  $C^*$  будет получена не более чем через  $[\log_2(N-1)]+1$  \*) шагов, каждый из которых состоит в построении матрицы  $C^{(2^k)}$  по известной матрице  $C^{(k)}$  согласно формуле (3.5). Имея матрицу  $C^*$ , легко составить любой оптимальный маршрут.

Пусть  $p_i$  и  $p_j$  — произвольные пункты транспортной сети. Если  $c_{ij}^* = \infty$ , то не существует ни одного маршрута, начинающегося в  $p_i$  и заканчивающегося в  $p_j$ .

Если же  $c_{ij}^* < \infty$ , то такие маршруты имеются, причем наиболее экономный строится следующим образом. Найдем индекс  $\lambda_1$  из условия

$$c_{i\lambda_1} + c_{\lambda_1 j}^* = \min_{\lambda \in E_i} (c_{i\lambda} + c_{\lambda j}^*),$$

где  $E_i$  — множество концов коммуникаций  $k_{i\lambda}$  с началом в пункте  $p_i$ . Оптимальный маршрут вслед за пунктом  $p_i$  проходит пункт  $p_{\lambda_1}$ . Аналогично разыскиваются остальные пункты искомого маршрута.

Если уже найдены пункты  $p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_t}$ , то следующий пункт  $p_{\lambda_{t+1}}$  определяется из условия

$$c_{\lambda_t \lambda_{t+1}} + c_{\lambda_{t+1} j}^* = \min_{\lambda \in E_{\lambda_t}} (c_{\lambda_t \lambda} + c_{\lambda j}^*). \quad (3.8)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока при некотором  $s$  пункт  $p_{\lambda_{s+1}}$  окажется тождественным конечному пункту  $p_j$ . Искомый оптимальный маршрут проходит последовательно через пункты

$$p_i, p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_{s-1}}, p_{\lambda_s}, p_j.$$

Предоставим читателю самостоятельно провести обоснование изложенного способа построения оптимальных маршрутов по матрице  $C^*$ .

\*)  $[X]$  — целая часть числа  $X$ .

При желании можно получить все оптимальные маршруты, идущие из  $p_i$  в  $p_j$ . Для этой цели следует при любом  $t$  отмечать не один, а все индексы  $\lambda_{t+1}$ , удовлетворяющие условию (3.8). Естественно, что такую операцию необходимо проводить для всех ранее отмеченных  $\lambda_t$ .

Если  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s$  — любая последовательность, состоящая из соответствующих отмеченных индексов, то

$$p_i, p_{\lambda'_1}, \dots, p_{\lambda'_{s-1}}, p_{\lambda'_s}, p_j$$

— оптимальный маршрут.

3.2. Приведем численный пример. Пусть требуется определить все оптимальные маршруты транспортной сети, изображенной на рис. 9.2.

Отрезки, соответствующие коммуникациям, лишены стрелок. Это означает, что пункты, соединенные отрезком, связаны двумя противоположными коммуникациями; транспортные расходы обеих коммуникаций одинаковы. Составим матрицу транспортных расходов коммуникаций:

$$C = C^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & \infty & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

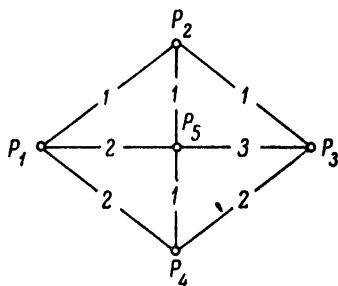


Рис. 9.2.

Используя соотношение (3.5) при  $k=1$ , образуем матрицу

$$C^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Проделаем еще один шаг — вычислим матрицу  $C^{(4)}$ . Как легко проверить,  $C^{(2)} = C^{(4)}$ . Следовательно, матрица

$C^{(2)}$  совпадает с матрицей  $C^*$  транспортных расходов оптимальных маршрутов.

Матрица  $C^* = C^{(2)}$  позволяет легко построить любой оптимальный маршрут. Пусть, например, следует найти оптимальный маршрут между  $p_1$  и  $p_3$ :

$$\min(c_{12} + c_{23}^*, c_{14} + c_{43}^*, c_{15} + c_{53}^*) = \min(2, 4, 4) = 2.$$

Поэтому  $p_2$  входит в искомый маршрут.

Далее,

$$\min(c_{23} + c_{33}^*, c_{25} + c_{53}^*) = \min(1, 3) = 1,$$

т. е. за пунктом  $p_2$  в оптимальном маршруте следует пункт  $p_3$ . Итак, оптимальный маршрут из  $p_1$  в  $p_3$  проходит через промежуточный пункт  $p_2$ .

**3.3.** Отметим одну модификацию изложенного метода, весьма удобную при реализации метода на ЦВМ.

В процессе вычисления матрицы  $C^{(2k)}$  необходимо, согласно соотношению (3.5), помнить матрицу  $C^{(k)}$ . Поэтому в памяти ЦВМ на каждом шаге должны храниться две матрицы.

Следующее простое соображение позволяет уменьшить загрузку памяти ЦВМ и в то же время улучшить сходимость метода.

После вычисления очередного элемента новой матрицы следует заменять им соответствующий элемент старой матрицы. Следующий элемент новой матрицы рассчитывается по измененной старой матрице и т. д.

Очевидно, в процессе решения задачи мы имеем теперь дело с одной матрицей, которая обновляется поэлементно. Обновив все элементы матрицы, возвращаемся к началу и снова проводим цикл обновления. Процесс длится до тех пор, пока дальнейшие преобразования перестанут изменять элементы матрицы. Установившаяся матрица составлена из величин транспортных расходов оптимальных маршрутов, т. е. совпадает с матрицей  $C^*$ . Назовем, как и прежде, совокупность операций, необходимых для полного обновления матрицы, шагом алгоритма. Если матрица  $\tilde{C}$  образуется из  $C^{(k)}$  за один шаг, то, очевидно, элементы  $\tilde{c}_{ij}$  — величины транспортных расходов  $t(i, j)$ -оптимальных маршрутов

при  $t(i, j) \geq 2k$ , причем, чем позднее обновлялся элемент  $c_{ij}^{(k)}$ , тем вероятнее, что  $t(i, j)$  превысит  $2k$ . Отсюда следует, что указанная модификация ведет к решению по крайней мере не медленнее, чем основной метод. В большинстве случаев сходимость оказывается более быстрой. Поскольку элементы матрицы, просматриваемые в конце шага, обычно сходятся быстрее первых элементов, то имеет смысл после каждого шага менять порядок обновления элементов. Это приведет к более равномерной сходимости процесса, что в свою очередь позволит быстрее прийти к искомой матрице  $C^*$ .

3.4. При описании методов построения оптимальных маршрутов предполагалось, что значения функции  $C$  транспортных расходов неотрицательны. Это ограничение существенно. Оно использовалось при выводе неравенства (2.2), на котором базируется обоснование метода Минти, и при доказательстве формулы (3.1) — основы метода Беллмана — Шимбела. Примеры показывают, что как метод Минти, так и метод Беллмана — Шимбела, вообще говоря, не ведут к цели, если некоторые из  $c_{ij}$  отрицательны. Более того, в настоящее время не существует ни одного приемлемого алгоритма построения оптимального маршрута, который приводил бы к искомому результату при  $c_{ij} < 0$ , для некоторых  $i, j$ , хотя многие интересные и важные задачи сводятся именно к этому случаю. Тем не менее в некоторых ситуациях метод Беллмана — Шимбела может оказаться полезным и при отрицательных  $c_{ij}$ .

Как отмечалось, геометрическим образом направленного маршрута является ломаная линия без самопересечений. Расширим понятие направленного маршрута, исключив из него предположение об отсутствии самопересечений в соответствующей ломаной. Именно, последовательность коммуникаций

$$k_{i_1 i_1}, k_{i_1 i_2}, \dots, k_{i_s i_s}$$

назовем *обобщенным маршрутом*, идущим из пункта  $p_i$  в пункт  $p_j$ .

Определение  $s$ -оптимального маршрута (п. 3.1) естественным образом переносится на более широкий

класс обобщенных маршрутов. Будем понимать под  $C^{(s)} = \|c_{ij}^{(s)}\|_N$  матрицу транспортных расходов для  $s$ -оптимальных обобщенных маршрутов. Рассуждения, полностью совпадающие с уже проведенными в п. 3.1, позволяют установить справедливость формулы (3.1) при любых знаках элементов матрицы  $C = C^{(1)}$ . Следовательно, метод Беллмана — Шимбела во всех случаях применим для отыскания  $s$ -оптимальных обобщенных маршрутов. Если сеть  $(P, K)$  и функция  $c(k_{ij})$ , определенная на множестве коммуникаций  $K$ , оказываются такими, что  $s$ -оптимальный обобщенный маршрут является маршрутом, либо может быть легко преобразован в  $s$ -оптимальный маршрут с теми же крайними пунктами, то, очевидно, метод ведет к выбору оптимальных маршрутов. Такое положение имеет место, например, при  $c(k_{ij}) \geq 0$ . Этим, собственно, и объясняется относительная простота задачи о наиболее экономном маршруте для неотрицательных функций  $C$ . Пусть теперь  $c(k_{ij})$  — произвольная функция, а транспортная сеть  $(P, K)$  не имеет направленных замкнутых маршрутов. (Примером здесь могут послужить транспортные сети, конструируемые при использовании системы сетевого планирования). При этом допущении любой обобщенный маршрут сети является ее маршрутом, и следовательно, метод Беллмана — Шимбела решает задачу выбора оптимального маршрута. Отмеченные выше предположения можно заменить одним более слабым ограничением.

Для применимости метода Беллмана — Шимбела достаточно потребовать, чтобы величины транспортных расходов каждого из направленных замкнутых маршрутов сети были неотрицательны.

Пусть задана произвольная транспортная сеть  $(P, K)$  и функция пропускных способностей  $d(k_{ij}) \geq 0$ , определенная на множестве  $K$ .

Фиксируем некоторую пару пунктов сети  $(P, K)$ . Заномеруем пункты множества  $P$  таким образом, чтобы первый пункт фиксированной пары (источник) имел обозначение  $p_1$ , а второй (сток) —  $p_N$ , где  $N$  — общее число пунктов сети.

Рассмотрим всевозможные потоки из  $p_1$  в  $p_N$ , совместимые с заданной функцией пропускных способностей. Задача состоит в отыскании среди них потока  $X^* = x^*(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , с максимальной величиной  $x_1^*$ , который называется *максимальным* потоком, идущим из  $p_1$  в  $p_N$ .

В дальнейшем мы убедимся, что задача о максимальном потоке представляет не только самостоятельный интерес. В ряде случаев анализ более сложных сетевых задач также требует построения максимальных потоков на сетях, формируемых в процессе исследования соответствующей задачи. В этой главе излагается алгоритм, позволяющий строить максимальные потоки для любых транспортных сетей. Алгоритм разработан американскими математиками Фордом и Фулкерсоном [43, 44].

### § 1. Свойства потоков на сетях

Приведем несколько простых, но полезных свойств потоков на сетях.

Последующие рассуждения удобнее проводить в терминах алгебраических потоков. Поэтому под потоком в

дальнейшем понимается функция  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , удовлетворяющая условиям

$$x(k_{ij}) = -x(k_{ji}), \quad (1.1)$$

$$\sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) = 0 \text{ для } i \neq 1, N, \quad (1.2)$$

$$x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K'. \quad (1.3)$$

Смысл символов  $E_i$  и  $K'$  был разъяснен в § 2 гл. 8. Функции  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , и  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$  удобно распространить на множество всех упорядоченных пар пунктов сети, положив, как обычно,

$$d(k_{ij}) = x(k_{ij}) = 0,$$

если  $p_i$  и  $p_j$  не связаны ни одной коммуникацией множества  $K$ . Отмеченное обстоятельство и обозначения, введенные в начале § 2 гл. 8, позволяют записать тождество

$$\sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) = x(p_i, P). \quad (1.4)$$

Следовательно, величина  $x_1$  потока  $X$  определяется соотношением

$$x_1 = x(p_1, P) = -x(p_N, P), \quad (1.5)$$

а условия (1.2) могут быть переписаны в виде

$$x(p_i, P) = 0 \text{ для } i \neq 1, N. \quad (1.6)$$

Если  $P'$  — произвольное подмножество множества  $P$ , то

$$x(P', P') = 0. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) является следствием условия (1.1) и наличия в левой части (1.7) слагаемых  $x(k_{ij})$  и  $x(k_{ji})$ , если только  $p_i, p_j \in P'$ .

Допустим, что множество пунктов  $P$  разбито на два непересекающихся подмножества  $P'$  и  $P''$ , причем  $p_1 \in P'$ , а  $p_N \in P''$ .

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} x_1 = x(p_1, P) &= \sum_{p_i \in P'} x(p_i, P) = x(P', P) = \\ &= x(P', P') + x(P', P'') = x(P', P''). \end{aligned}$$

Первое равенство цепочки уже установлено. Второе равенство вытекает из (1.6) и предположения о том, что  $p_N \notin P'$ . Третье и четвертое равенства — следствия свойства (2.2) п. 2.1 гл. 8, пятое — определяется соотношением (1.7). Итак, при любом разбиении множества  $P$  на непересекающиеся подмножества  $P'$  и  $P''$  ( $p_1 \in P'$ ,  $p_N \in P''$ ) и произвольном потоке  $X = x(k_{ij})$  справедливо равенство

$$x_1 = x(P', P''). \quad (1.8)$$

Пусть  $P'$  и  $P''$  — два произвольных непересекающихся подмножества множества  $P$ , составляющих в сумме  $P$ , из которых первое содержит источник  $p_1$ , а второе — сток  $p_N$ . Назовем множество  $\Gamma \subset K'$  коммуникаций, исходящих из пунктов  $P'$  и заканчивающихся в пунктах  $P''$ , *разрезом* транспортной сети  $(P, K')$  с источником  $p_1$  и стоком  $p_N$ . Разрез  $\Gamma$  однозначно определяется одним из множеств пары  $P', P''$ .

Под *пропускной способностью*  $d(\Gamma)$  разреза  $\Gamma$  будем понимать суммарную пропускную способность всех коммуникаций, составляющих  $\Gamma$ ,

$$d(\Gamma) = \sum_{k_{ij} \in \Gamma} d(k_{ij}). \quad (1.9)$$

Если  $\Gamma$  — разрез, то любой направленный маршрут из  $p_1$  в  $p_N$  содержит хотя бы одну коммуникацию множества  $\Gamma$ . В самом деле, рассмотрим произвольный маршрут из  $p_1$  в  $p_N$ , проходящий через пункты  $p_1 = p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s} = p_N$ . Пусть  $\lambda$  — минимальный номер, для которого  $p_{i_\lambda} \in P''$ . Тогда коммуникация  $k_{i_{\lambda-1} i_\lambda} \in \Gamma$ , так как  $p_{i_{\lambda-1}} \in P'$ .

Пусть  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , — любой поток сети  $(P, K')$ , совместимый с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , а  $\Gamma$  — произвольный разрез этой сети.

Имеет место неравенство

$$x_1 \leq d(\Gamma). \quad (1.10)$$

Действительно, если  $P'$  и  $P''$  — подмножества  $P$ , породившие разрез  $\Gamma$ , то, согласно (1.8), (1.3) и (1.9),

$$x_1 = x(P', P'') = \sum_{k_{ij} \in \Gamma} x(k_{ij}) \leq \sum_{k_{ij} \in \Gamma} d(k_{ij}) = d(\Gamma).$$

Из неравенства (1.10) вытекает следующий признак оптимальности потока: *если величина  $x_1^*$  потока  $X^*$  оказывается равной пропускной способности некоторого разреза сети, то  $X^*$  — максимальный поток.*

## § 2. Алгоритм Форда—Фулкерсона

2.1. Изложим алгоритм построения оптимального потока для произвольной сети  $(P, K)$  с источником  $p_1$  и стоком  $p_N$ , совместимого с некоторой функцией пропускных способностей  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ .

Алгоритм складывается из отдельных итераций, на каждой из которых устанавливается максимальность имеющегося потока либо строится новый поток, величина которого больше величины старого потока.

Приведем описание отдельной итерации алгоритма, предполагая известным некоторый поток  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ . Начнем с определений. Пусть  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , — произвольный поток, совместимый с функцией  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ . Коммуникация  $k_{ij} \in K'$  называется *X-насыщенной*, если  $x_{ij} = x(k_{ij}) = d_{ij}$ ; коммуникация  $k_{ij}$  называется *X-ненасыщенной*, если  $x_{ij} < d_{ij}$ . Эти определения предполагают, что  $X$  — алгебраический поток. Следовательно, множество *X-ненасыщенных* коммуникаций состоит из коммуникаций  $k_{ij} \in K$ , для которых  $x_{ij} < d_{ij}$ , и коммуникаций  $k_{ij} \notin K$ , для которых  $x_{ji} > 0$ . Остальные коммуникации составляют множество *X-насыщенных* коммуникаций.

Итерация состоит в последовательном построении некоторого множества отмеченных пунктов сети. Прежде всего отмечается источник  $p_1$ . В процессе проведения итерации в множество отмеченных пунктов включаются все новые и новые элементы.

Назовем совокупность действий, в результате которых число отмеченных пунктов увеличивается на еди-

ницу либо фиксируется, что множество отмеченных пунктов полностью определено, *отдельным шагом итерации*. Предположим, что уже проделано  $t$  шагов, в результате которых получено множество  $P_t$  отмеченных пунктов сети. Очередной  $(t+1)$ -й шаг состоит в упорядоченном просмотре пунктов множества  $P_t$ , имеющем целью обнаружить отмеченный пункт, из которого выходит  $X$ -ненасыщенная коммуникация, заканчивающаяся в некотором неотмеченном пункте. Как только такой пункт  $p_\lambda$  выявляется, неотмеченный пункт  $p_\mu$ , являющийся концом  $X$ -ненасыщенной коммуникации  $k_{\lambda\mu}$ , отмечается числом  $\lambda$  и  $(t+1)$ -й шаг заканчивается.

При этом следует различать две возможности:

- а) пункт  $p_\mu$  не является стоком  $p_N$ ;
- б) пункт  $p_\mu$  является стоком  $p_N$ .

В случае а) переходим к следующему шагу итерации, полагая  $P_{t+1} = \{P_t, p_\mu\}$ .

Случай б) указывает на то, что  $P_{t+1}$  — полное множество отмеченных пунктов.

Может оказаться, что, просмотрев все пункты множества  $P_t$ , мы убедимся в отсутствии среди них пункта  $p_\lambda$ , связанного с некоторым неотмеченным пунктом  $p_\mu$  с помощью  $X$ -ненасыщенной коммуникации  $k_{\lambda\mu}$ . Назовем эту возможность случаем в). Случай в) означает, что  $P_t$  — полное множество отмеченных пунктов. Итак, отдельный шаг итерации завершается одним из трех исходов. Исход а) указывает на необходимость проведения следующего шага, исходы б) и в) фиксируют построение полного множества отмеченных пунктов, которое мы обозначим символом  $P'$ . Каждый шаг итерации (кроме, может быть, последнего) увеличивает число отмеченных пунктов. Поэтому через конечное число шагов мы обязательно столкнемся со случаем б) или со случаем в).

**2.2.** Разберем каждую из этих возможностей в отдельности. Случай б) заключается в построении полного множества отмеченных пунктов  $P'$ , которое содержит сток  $p_N$ .

Покажем, что это влечет за собой возможность построения потока  $X' = x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , величина  $x'_j$  которого больше величины  $x_1$  потока  $X$ .

Образуем последовательность  $\{p_{i_\alpha}\}$  пунктов множества  $P'$ , руководствуясь следующими правилами.

Положим  $p_{i_1} = p_N$ . Если пункты  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{\alpha-1}}$  последовательности уже найдены, то индекс  $i_\alpha$ , определяющий  $\alpha$ -й пункт последовательности, считается равным числу, с помощью которого был отмечен пункт  $p_{i_{\alpha-1}}$ . Формирование последовательности проводится до тех пор, пока это возможно.

Каждый пункт множества  $P'$ , кроме источника  $p_1$ , отмечен некоторым числом. Все элементы последовательности различны, так как предположение противного влечет за собой наличие пункта, который был отмечен два раза.

Следовательно, последовательность  $\{p_{i_\alpha}\}$  содержит конечное число пунктов и оканчивается источником  $p_1$ , т. е. имеет вид

$$p_N = p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, \dots, p_{i_{s-1}}, p_{i_s} = p_1. \quad (2.1)$$

В соответствии с правилом расширения множества отмеченных пунктов коммуникации

$$k_{i_{\lambda+1}i_\lambda} \quad \text{при} \quad 1 \leq \lambda \leq s-1$$

являются  $X$ -ненасыщенными, т. е.

$$x_{i_{\lambda+1}i_\lambda} < d_{i_{\lambda+1}i_\lambda} \quad \text{для} \quad \lambda = 1, 2, \dots, s-1. \quad (2.2)$$

Положим

$$\theta = \min_{1 \leq \lambda \leq s-1} (d_{i_{\lambda+1}i_\lambda} - x_{i_{\lambda+1}i_\lambda}), \quad (2.3)$$

$$x'(k_{ij}) = -x'(k_{ji}) =$$

$$= \begin{cases} x(k_{ij}) + \theta, & \text{если } k_{ij} = k_{i_{\lambda+1}i_\lambda} \text{ для } \lambda = 1, \dots, s-1, \\ x(k_{ij}) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Согласно соотношениям (2.2) и (2.3)

$$\theta > 0, \quad (2.5)$$

причем предполагается, что  $\theta < \infty$ ,

Функция  $x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , является алгебраическим потоком, совместимым с функцией пропускных способностей  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ .

Действительно, условия (1.2) могут нарушиться лишь при  $i = i_\lambda$  для  $\lambda = 2, 3, \dots, s-1$ . Но, согласно (2.4), при любом таком  $\lambda$  составляющая  $x_{i_\lambda i_{\lambda-1}}$  потока  $x(k_{ij})$  увеличивается на  $\theta$ , составляющая  $x_{i_\lambda i_{\lambda+1}} = -x_{i_{\lambda+1} i_\lambda}$  уменьшается на ту же величину  $\theta$ , а остальные компоненты потока, которые отвечают коммуникациям, исходящим из  $p_\lambda$ , сохраняют свои прежние значения. Следовательно, условия (1.2) останутся выполненными и для  $i = i_\lambda$ .

Условия (1.3) также не нарушатся, так как, согласно (2.4) и (2.5),

$$\begin{aligned} x'(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) &= x(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) + \theta \leq \\ &\leq x(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) + d_{i_{\lambda+1} i_\lambda} - x(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) = d_{i_{\lambda+1} i_\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(k_{i_\lambda i_{\lambda+1}}) &= -x'(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) = -x(k_{i_{\lambda+1} i_\lambda}) - \theta < \\ &< x(k_{i_\lambda i_{\lambda+1}}) \leq d_{i_\lambda i_{\lambda+1}}. \end{aligned}$$

Оценим величину  $x'_1$  вновь построенного потока  $X'$ . Среди компонент  $x(k_{ij})$  потока  $X$  изменению подверглась лишь  $x(k_{i_{s-1}})$ , увеличив свое значение на  $\theta > 0$ . Следовательно,

$$x_1^{(1)} = x_1 + \theta > x_1. \quad (2.6)$$

Итак, если очередной шаг имеет исход б), то строится новый поток, который превосходит старый по величине.

Обратимся к анализу случая в). Этот случай заключается в том, что построенное множество  $P'$  отмеченных пунктов, во-первых, не содержит сток  $p_N$ , а во-вторых, не может быть расширено. Покажем, что наличие случая в) указывает на максимальность потока  $x(k_{ij})$ .

Пусть  $P''$  — множество неотмеченных пунктов сети. Очевидно,  $P'$  и  $P''$  не имеют общих пунктов и в совокупности составляют множество  $P$ . Кроме того,

$$p_1 \in P', \quad p_N \in P''.$$

Следовательно, множество  $\Gamma$  коммуникаций, идущих от пунктов  $P'$  к пунктам  $P''$ , является разрезом сети  $(P, K')$ .

Если  $k_{ij}$  — произвольная коммуникация разреза  $\Gamma$ , то

$$x(k_{ij}) = d_{ij}. \quad (2.7)$$

Действительно, предположение противного дало бы возможность расширить множество  $P'$ , присоединив к нему до этого не отмеченный пункт  $p_j$ .

Учитывая равенства (2.7) и (1.8), имеем

$$d(\Gamma) = \sum_{k_{ij} \in \Gamma} d(k_{ij}) = \sum_{k_{ij} \in \Gamma} x(k_{ij}) = x(P', P'') = x_1. \quad (2.8)$$

Соотношения (1.10) и (2.8) приводят к неравенству  $\bar{x}_1 \leq x_1$ , где  $\bar{x}_1$  — величина произвольного потока  $\bar{X}$ , совместимого с функцией  $D$ .

Следовательно,  $x(k_{ij})$  — искомый максимальный поток.

Итак, если некоторый шаг итерации завершается исходом в), то поток  $x(k_{ij})$  является максимальным.

**2.3.** Резюмируем содержание двух предыдущих пунктов. Итерация алгоритма состоит из конечного числа шагов, в результате которых строится полное множество отмеченных пунктов  $P'$ . В зависимости от исхода последнего шага итерации мы либо улучшаем имеющийся поток (случай б)), либо убеждаемся в его максимальной (случай в)). В первом случае будем говорить об исходе 1 данной итерации, если  $\theta < \infty$ , во втором — об исходе 2. Исход 3 итерации фиксируется при получении  $\theta = \infty$ , т. е. при построении маршрута из  $p_1$  в  $p_N$ , каждая коммуникация которого имеет неограниченную пропускную способность. Исход 3 указывает на существование потоков, совместимых с функцией  $D$  и имеющих сколь угодно большие значения.

Алгоритм складывается из ряда последовательно проводимых итераций и разбивается на предварительную и основную части.

Как будет видно из дальнейшего, разделение алгоритма на предварительную и основную части произведено для того, чтобы в случае существования потоков, совместимых с функцией  $D$  и имеющих сколь угодно

большие значения, это было установлено за конечное число итераций.

Первая итерация проводится, отправляясь от нулевого потока, все компоненты которого — нули. Каждая последующая итерация реализуется, исходя из потока, построенного на предыдущей итерации. Обращение к последующей итерации осуществляется лишь при исходе 1 для предыдущей итерации.

Вначале следуют итерации предварительной части алгоритма. Перед началом каждой из этих итераций из сети  $(P, K')$  выбрасываются \*) те коммуникации, которые на предыдущей итерации стали насыщенными. Итерации вспомогательной части алгоритма проводятся до тех пор, пока одна из них завершится исходом 2 или исходом 3. Очевидно, для этого потребуется конечное число итераций, не превышающее общего числа коммуникаций сети.

При исходе 3 задача о максимальном потоке не имеет решения, процесс должен быть прекращен. Исход 2 указывает на необходимость обращения к основной части алгоритма, перед началом которой восстанавливаются все коммуникации, выброшенные на предыдущих итерациях. На протяжении всех итераций основной части алгоритма множество коммуникаций остается неизменным. Предположим, что пропускные способности  $d_{ij}$  всех коммуникаций — целые числа. Покажем, что через конечное число итераций будет получен искомый максимальный поток.

Если предварительная часть алгоритма завершилась исходом 2, то величины потоков, совместимых с функцией  $D$ , ограничены сверху. Действительно, пусть  $l$  — произвольный маршрут, составленный из коммуникаций сети и идущий из  $p_1$  в  $p_N$ . Нетрудно заметить, что  $l$  обязательно содержит коммуникации с ограниченными пропускными способностями. Проверки требует лишь тот случай, когда  $l$  не содержит ни одной коммуникации из числа выброшенных в предварительной части алгоритма.

---

\*) Выброшенные коммуникации не участвуют в последующих итерациях вспомогательной части алгоритма; составляющие потока на этих коммуникациях сохраняют неизменные значения.

Но тогда  $l$  является маршрутом сети, с которой имеет дело последняя итерация предварительной части алгоритма, и наш вывод следует из существования максимального потока этой сети, что в свою очередь обусловлено исходом 2. Объединим в множество  $S'$  все те пункты сети  $(P, K')$ , в которые можно попасть из  $p_1$ , двигаясь по направленным маршрутам, составленным из коммуникаций с неограниченными пропускными способностями; остальные пункты сети объединим в множестве  $S''$ . В соответствии с доказанным  $p_N \in S''$  и, следовательно, по (1.8) для величины  $x_1$  любого потока  $X$  справедливо соотношение

$$x_1 = x(S', S'') = \sum_{k_{ij} \in R} x(k_{ij}), \quad (2.9)$$

где  $R$  — множество коммуникаций сети, идущих от пунктов  $S'$  к пунктам  $S''$ .

Все коммуникации множества  $R$  имеют ограниченные пропускные способности, поскольку в противном случае один из пунктов множества  $S''$  можно было бы присоединить к множеству  $S'$ . Поэтому для любого потока  $X$ , совместимого с функцией  $D$ , равенство (2.9) приводит к неравенству

$$x_1 = \sum_{k_{ij} \in R} x(k_{ij}) \leq \sum_{k_{ij} \in R} d(k_{ij}) = d < \infty, \quad (2.10)$$

указывающему на ограниченность величин всех таких потоков. Заметим далее, что в предположении целочисленности величин  $d_{ij}$  компоненты всех потоков, формируемых на различных итерациях алгоритма, являются целыми числами. Поэтому каждая итерация, оканчивающаяся исходом 1, увеличивает величину потока на целое число, большее нуля, т. е. по меньшей мере на единицу. Учитывая этот факт и соотношение (2.10), делаем вывод, что общее число итераций алгоритма не может превысить число  $d$ , причем последняя итерация обязательно завершится исходом 2.

Итак, либо в предварительной части алгоритма будет получен исход 3, либо основная часть алгоритма завершится исходом 2, причем общее число итераций алгоритма конечно. Это утверждение легко распростра-

нить и на тот случай, когда все величины  $d_{ij}$  — рациональные числа.

Если максимальный поток существует, то приведенный алгоритм позволяет отыскать его за конечное число итераций. В противном случае констатируется неразрешимость задачи, на что затрачивается опять-таки конечное число итераций. Отметим, что в случае, когда существование максимального потока гарантируется, можно не делить алгоритм на предварительную и основную части. Процесс построения максимального потока в этом случае состоит из конечного числа итераций основной части алгоритма.

**2.4.** Алгоритм построения оптимального потока может быть использован не только для вычислительных целей, но и как инструмент в теоретических исследованиях.

Отметим одно важное предложение, вывод которого легко осуществить с помощью приведенного алгоритма.

Назовем разрез  $\Gamma^*$  сети  $(P, K')$  *минимальным*, если

$$d(\Gamma^*) \leq d(\Gamma)$$

для всех разрезов  $\Gamma$  сети.

**Теорема 2.1.** *Если существует максимальный поток  $X^*$  сети  $(P, K')$  со значением  $x_1^*$ , то существует также минимальный разрез  $\Gamma^*$  этой сети с пропускной способностью  $d(\Gamma^*)$ , причем*

$$x_1^* = d(\Gamma^*). \quad (2.11)$$

Проведем доказательство в предположении целочисленности всех  $d_{ij}$ . Применим к сети  $(P, K')$  рассмотренный алгоритм, который через конечное число итераций завершится исходом 2 (максимальный поток существует).

Пусть  $\Gamma^*$  — разрез, который определяется множествами  $P'$  и  $P''$ , построенными на последней итерации, а  $X^*$  — полученный максимальный поток. В соответствии с равенством (2.8)

$$x_1^* = d(\Gamma^*).$$

Используя далее неравенство (1.10) при  $x_1 = x_1^*$ , приходим к соотношению

$$d(\Gamma^*) \leq d(\Gamma),$$

справедливому для любого разреза  $\Gamma$  сети.

Следовательно,  $G^*$  — минимальный разрез. Итак, минимальный разрез сети  $(P, K')$  существует и его пропускная способность равна величине максимального потока. Теорема доказана.

Задача отыскания минимального разреза двойственна по отношению к задаче о максимальном потоке. В этом можно было бы убедиться, рассматривая задачу о максимальном потоке как задачу линейного программирования, каковой она, очевидно, является.

Теорема 2.1 представляет собой первую теорему двойственности для задачи о максимальном потоке.

Заметим, что алгоритм построения максимального потока решает не только прямую задачу, но определяет также и минимальный разрез сети.

### § 3. Некоторые замечания о вычислительной схеме

3.1. Приведем несколько замечаний, которые могут быть полезны при построении вычислительной схемы для решения задачи о максимальном потоке.

Основное содержание отдельной итерации метода, как мы видели, состоит в построении множества  $P'$  отмеченных пунктов. Для этого приходится на каждом шаге просматривать отмеченные пункты. Порядок просмотра может быть выбран произвольно. Необходимо лишь, чтобы каждый отмеченный пункт был в конце концов просмотрен. Задаваясь тем или иным порядком просмотра, приходим к различным численным реализациям алгоритма. Можно, например, считать каждый вновь отмеченный пункт последним в имеющемся множестве отмеченных элементов. Другая возможность состоит в том, что вновь отмеченному пункту придается номер, на единицу больший номера последнего просмотренного пункта; номера всех последующих пунктов сдвигаются на единицу. Можно предложить целый ряд других правил, устанавливающих последовательность просмотра отмеченных пунктов.

Последовательный просмотр отмеченных пунктов вовсе не является единственно возможным способом формирования множества  $P'$ . Очевидно, можно добиться того же результата, просматривая неотмеченные пункты.

Как только обнаруживается неотмеченный пункт, связанный  $X$ -ненасыщенной коммуникацией с одним из отмеченных пунктов, он включается в множество отмеченных пунктов. Порядок просмотра неотмеченных пунктов может быть также самым разнообразным.

Иногда целесообразнее строить множество отмеченных пунктов (множество  $P'$ ), исходя не из источника  $p_1$ , а из стока  $p_N$ . В множество  $P'$  последовательно включаются пункты, из которых выходит хотя бы одна  $X$ -ненасыщенная коммуникация, оканчивающаяся в одном из уже отмеченных пунктов. Процесс построения  $P'$  считается завершенным, если либо на последнем шаге отмечается источник  $p_1$ , либо дальнейшее расширение множества отмеченных пунктов оказывается невозможным. Первая возможность открывает путь для дальнейшего улучшения потока; вторая — означает, что получен максимальный поток.

Можно отыскивать маршрут из  $p_1$  в  $p_N$ , состоящий из  $X$ -ненасыщенных коммуникаций, отправляясь одновременно и от источника, и от стока. Другими словами, можно строить одновременно два множества отмеченных пунктов, одно из которых содержит  $p_1$ , а другое —  $p_N$ . Как только обнаруживается пункт, подлежащий включению в оба множества, искомый маршрут найден, и поток может быть улучшен. Другой признак окончания процесса формирования множеств отмеченных элементов состоит в невозможности их дальнейшего расширения, что указывает на максимальность имеющегося потока.

Естественно, что каждый из указанных способов построения ненасыщенного маршрута из  $p_1$  в  $p_N$  может иметь различную вычислительную реализацию в зависимости от выбранного порядка просмотра отмеченных или неотмеченных пунктов сети.

3.2. В соответствии с формулой (2.6) величина потока, построенного на данной итерации, больше величины старого потока на число  $\theta > 0$ , причем, согласно (2.3), число  $\theta$  — минимум уклонений компонент старого потока от соответствующих значений  $d_{ij}$  вдоль найденного ненасыщенного маршрута. Назовем число  $\theta$  *степенью ненасыщенности* маршрута. В общем случае

источник и сток могут быть связаны многими ненасыщенными маршрутами. Естественно попытаться так организовать процесс формирования ненасыщенного маршрута, чтобы находить маршрут из  $p_1$  в  $p_N$  с возможно большей степенью ненасыщенности. Тогда на каждой итерации рост величины потока будет максимально возможным.

Реализация этого замечания может быть осуществлена с помощью модификации одного из алгоритмов отыскания наиболее экономного маршрута.

Выберем для этой цели метод Минти (см. § 2 гл. 9). Каждый отмеченный пункт  $p_i$  (кроме источника  $p_1$ ) снабжается дополнительным индексом  $\theta_i$ , который равен максимуму степеней ненасыщенности маршрутов, идущих из  $p_1$  в  $p_i$ . Индекс  $\theta_i$  вычисляется одновременно с присоединением пункта  $p_i$  к множеству отмеченных пунктов. Это оказывается возможным благодаря следующему небольшому видоизменению правила выбора пункта, подлежащего включению в число отмеченных. На каждом шаге итерации просматриваются все неотмеченные пункты. Среди них выбираются те, в которых заканчивается одна из ненасыщенных коммуникаций, имеющих начало в отмеченном пункте.

Для каждого такого пункта  $p_i$  подсчитывается число

$$\delta_i = \max\{\min(\theta_\lambda, d_{\lambda i} - x_{\lambda i})\},$$

где максимум берется по всем тем номерам  $\lambda$  отмеченных пунктов  $p_\lambda$ , из которых выходят ненасыщенные коммуникации, заканчивающиеся в  $p_i$ .

Далее среди выбранных пунктов  $p_i$  выделяется пункт  $p_{i'}$  с наибольшим значением числа  $\delta_{i'}$ . Этот пункт включается в число отмеченных, причем  $\theta_{i'}$  полагается равным  $\delta_{i'}$ . Если  $\max \delta_i$  достигается на нескольких индексах  $i$ , то отмечают все соответствующие пункты, причем каждому из них приписывается число, равное  $\max \delta_i$ .

Процесс формирования множества  $P'$  отмеченных пунктов заканчивается, как и прежде, либо включением в  $P'$  стока  $p_N$ , либо в результате невозможности дальнейшего расширения множества.

В первом случае правило, изложенное при описании отдельной итерации алгоритма, позволяет построить маршрут из  $p_1$  в  $p_N$ , составленный из ненасыщенных коммуникаций. Нетрудно убедиться в том, что построенный маршрут имеет максимально возможную степень ненасыщенности. Вторая возможность указывает на оптимальность имеющегося потока.

Изложенная модификация алгоритма построения максимального потока несколько увеличивает трудоемкость отдельной итерации, однако в большинстве случаев существенно снижает общее число итераций, необходимых для решения задачи.

**3.3.** Приведем еще одно простое замечание, учет которого может сократить объем вычислений на каждой итерации. При переходе к следующей итерации система ненасыщенных коммуникаций меняется. Поэтому процесс формирования множества  $P'$  должен быть повторен заново на каждой итерации. Однако легко указать некоторое подмножество отмеченных пунктов предыдущей итерации, которое целиком войдет в множество  $P'$  для последующей итерации. Это подмножество естественно принять за исходное в процессе формирования  $P'$ .

Допустим, что предыдущая итерация завершилась построением нового потока путем изменения старого потока вдоль маршрута, проходящего через пункты (2.1). Пусть  $\mu$  — максимальное значение индексов  $\lambda$ , при которых

$$\theta = d_{i_{\lambda+1}t_{\lambda}} - x_{i_{\lambda+1}t_{\lambda}}.$$

Очевидно, переход из ненасыщенных в насыщенные и обратно в результате изменения потока возможен только для коммуникаций, связывающих пункты  $p_{i_{\lambda}}$  и  $p_{i_{\lambda+1}}$  при  $\lambda \leq \mu$ .

Следовательно, все те пункты, которые были отмечены на предыдущей итерации раньше пункта  $p_{i_{\mu+1}}$ , в том же порядке будут отмечены и на последующей итерации. Эти пункты остаются в новом множестве  $P'$ , причем индексы, приписанные им, сохраняют свои прежние значения.

## § 4. Пример

Приведем пример использования алгоритма построения оптимального потока. Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 10.1, с источником  $p_1$  и стоком  $p_8$ . Значения пропускных способностей отдельных коммуникаций помечены на том же рисунке.

Разделим процесс решения на предварительную и основную части (этого можно было бы и не делать, так как максимальный поток заведомо существует и его величина не превышает  $d_{12} + d_{13} + d_{14} = 12$ ).

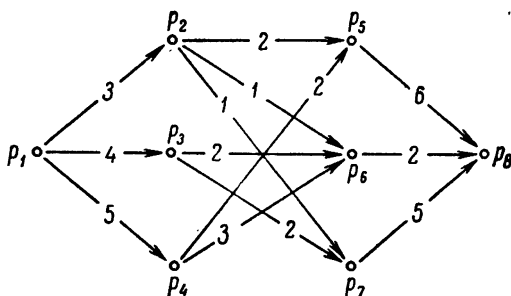


Рис. 10.1.

Итерация I. Исходным является нулевой поток. В множество отмеченных пунктов последовательно включаются пункты

$$p_1, p_2(1), p_5(2), p_8(5).$$

Здесь и далее использован такой порядок просмотра, когда вновь отмеченный пункт получает минимальный свободный порядковый номер, т. е. просматривается в первую очередь.

Итерация содержит три шага, причем последний завершается исходом б) (пункт  $p_8$  — сток — попал в число отмеченных).

Переходим к новому потоку  $X^{(1)}$ , полагая

$$x_{12}^{(1)} = x_{25}^{(1)} = x_{58}^{(1)} = \theta = \min(3, 2, 6) = 2.$$

Остальные составляющие потока  $X^{(1)}$  — нули. Выбрасываем из множества  $K$  насыщенную коммуникацию  $k_{25}$ .

Итерация II. Множество  $P'$  отмеченных пунктов содержит

$$p_1, p_2(1), p_6(2), p_8(6).$$

Переходим к потоку  $X^{(2)}$ , изменяя  $X^{(1)}$  вдоль найденного маршрута  $k_{12}, k_{26}, k_{68}$ :

$$x_{12}^{(2)} = 2 + \theta, x_{26}^{(2)} = \theta, x_{68}^{(2)} = \theta; \theta = \min(1, 1, 2) = 1.$$

Множество  $K$  лишается коммуникаций  $k_{12}$  и  $k_{26}$ .

Итерация III. Множество  $P'$  составляется из пунктов

$$p_1, p_3(1), p_6(3), p_8(6).$$

Переход к потоку  $X^{(3)}$  сводится к вычислению

$$x_{13}^{(3)} = x_{36}^{(3)} = \theta, x_{68}^{(3)} = 1 + \theta; \theta = \min(4, 2, 1) = 1.$$

Коммуникация  $k_{68}$  покидает множество  $K$ .

Итерация IV.

$$P' = \{p_1, p_3(1), p_7(3), p_8(7)\}.$$

Поток  $X^{(4)}$  отличается от  $X^{(3)}$  составляющими

$$x_{13}^{(4)} = 1 + \theta, x_{37}^{(4)} = x_{78}^{(4)} = \theta; \theta = \min(3, 2, 5) = 2.$$

Из множества  $K$  удаляется коммуникация  $k_{37}$ .

Итерация V.

$$P' = \{p_1, p_4(1), p_5(4), p_8(5)\}.$$

Снова имеет место случай б); переходим к потоку  $X^{(5)}$ , меняя значения следующих компонент потока  $X^{(4)}$ :

$$x_{14}^{(5)} = x_{45}^{(5)} = \theta, x_{58}^{(5)} = 2 + \theta; \theta = \min(5, 2, 4) = 2.$$

Коммуникация  $k_{45}$  исключается из множества  $K$ .

Итерация VI. Множество  $P'$  последовательно поглощает пункты

$$p_1, p_3(1), p_6(3), p_4(1).$$

Дальнейшее расширение множества отмеченных пунктов невозможно. Итерация завершается исходом 2.

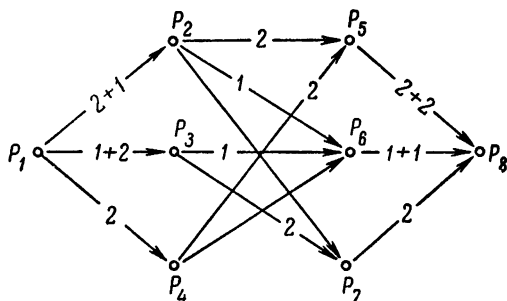


Рис. 10.2.

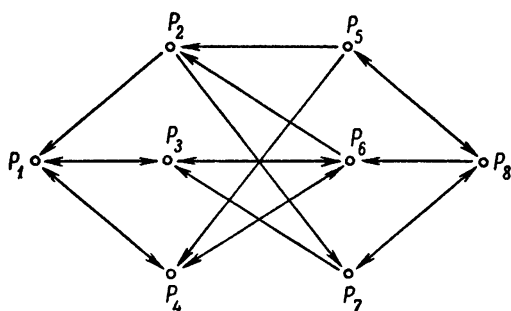


Рис. 10.3.

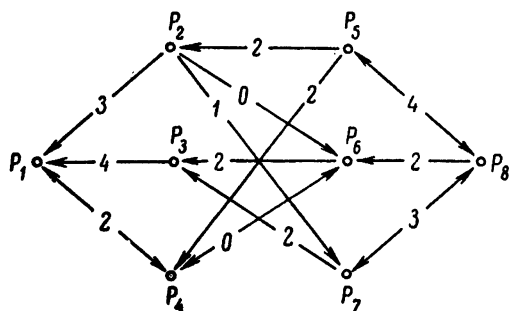


Рис. 10.4.

Последовательность вычислений в предварительной части алгоритма отражена на рис. 10.2.

Переходим к основной части алгоритма.

Итерация VII. На рис. 10.3 изображена транспортная сеть  $(P, K^{(6)})$ , где  $K^{(6)}$  — множество  $X^{(6)}$ -ненасыщенных коммуникаций  $k_{ij} \in K'$ . Построение множества  $P'$  удобно осуществлять, опираясь именно на эту сеть.

Последовательно включаем в множество  $P'$  пункты

$$p_1, p_3(1), p_6(3), p_2(6), p_7(2), p_8(7).$$

Итерация состоит из пяти шагов, последний из которых имеет исход б). В результате образуется маршрут из  $p_1$  в  $p_8$ , построенный из  $X^{(6)}$ -ненасыщенных коммуникаций

$$k_{13}, k_{36}, k_{62}, k_{27}, k_{78}.$$

Поток  $X^{(7)}$  отличается от потока  $X^{(6)}$  составляющими  $x_{13}^{(7)} = 3 + \theta$ ,  $x_{36}^{(7)} = 1 + \theta$ ,  $x_{26}^{(7)} = 1 - \theta$ ,  $x_{27}^{(7)} = \theta$ ,  $x_{78}^{(7)} = 2 + \theta$ ;

$$\theta = \min(1, 1, 1, 1, 3) = 1.$$

Итерация VIII. Транспортная сеть  $(P, K^{(7)})$ , где  $K^{(7)}$  — система  $X^{(7)}$ -ненасыщенных коммуникаций множества  $K'$ , представлена на рис. 10.4.

Пользуясь сетью  $(P, K^{(7)})$ , составляем множество  $P'$ :

$$p_1, p_4(1), p_6(4), p_3(6).$$

4-й шаг итерации завершается случаем в). Дальнейшее продолжение процесса отметки пунктов невозможно. Следовательно, поток  $X^{(7)}$  — искомый максимальный поток. Составляющие потока  $X^{(7)}$  указаны на рис. 10.4, причем все цифры относятся к  $x_{ij}^{(7)}$  при  $i < j$ . Величина  $x_1^*$  максимального потока равна 9.

Одновременно получен минимальный разрез  $\Gamma^*$  сети, состоящий из коммуникаций

$$k_{12}, k_{45}, k_{68}, k_{62}, k_{37},$$

$$d(\Gamma^*) = 3 + 2 + 2 + 0 + 2 = 9 = x_1^*.$$

В этой главе дается общая постановка транспортной задачи на сети и выясняются ее взаимоотношения с задачами типа  $T$  и  $T_d$ , подробно изученными в гл. 3—6.

### § 1. Постановка задачи

1.1. Пусть задана произвольная транспортная сеть  $(P, K)$ . На множестве  $P$  пунктов сети определена функция  $q(p_i)$  производства и потребления; на множестве  $K$  заданы функция  $d(k_{ij})$  пропускных способностей коммуникаций сети и функция  $c(k_{ij}) \geq 0$  транспортных расходов.

В § 2 гл. 8 было дано определение плана перевозок на сети  $(P, K)$ , совместимого с функциями  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , и  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ . При формулировке транспортной задачи можно либо отправляться от понятия алгебраического плана, либо использовать арифметическую запись плана. Приведем вначале постановку задачи, которая связана с алгебраическими планами, т. е. с функциями  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , удовлетворяющими условиям

$$x(p_i, P) = \sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) = q(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K', \quad (1.2)$$

$$x(k_{ij}) = -x(k_{ji}). \quad (1.3)$$

Напомним, что  $E_i$  — множество коммуникаций  $k_{ij} \in K'$ , исходящих из пункта  $p_i$ ;  $K'$  образуется из  $K$  добавлением таких коммуникаций  $k_{ij} \notin K$ , для которых  $k_{ji} \in K$ . Для удобства будем, как обычно, считать функции  $X$  и  $D$  определенными для всех  $k_{ij}$ , полагая  $x(k_{ij}) = d(k_{ij}) = 0$ , если  $k_{ij} \notin K$ .

Образуем с помощью значений функции  $c(k_{ij})$  систему функций  $\varphi_{ij}(x_{ij})$ , определяющих стоимость перевозки  $x_{ij}$  вдоль коммуникации  $k_{ij}$ :

$$\varphi_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}x_{ij} & \text{при } x_{ij} \geq 0, \\ -c_{ji}x_{ij} & \text{при } x_{ij} < 0. \end{cases}$$

Функция  $\varphi_{ij}(x_{ij})$  в общем случае — кусочно-линейная выпуклая вниз функция с одним изломом (рис. 11.1).

Если пункты  $p_i$  и  $p_j$  связаны одной коммуникацией, то функции  $\varphi_{ij}(x_{ij})$  и  $\varphi_{ji}(x_{ji})$  линейны на тех отрезках, на которых они определены.

Транспортная задача на сети  $(P, K)$  с функцией производства и потребления  $Q = q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , функцией пропускных способностей  $D$  и функцией транспортных расходов  $C$  состоит в построении плана перевозок  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , совместимого с  $Q$  и  $D$ , для которого суммарные расходы

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} \sum_{k_{ij} \in K'} \varphi_{ij}(x(k_{ij})) \quad (1.4)$$

достигают минимума.

Задача (1.1) — (1.4) не является задачей линейного программирования из-за нелинейности функции (1.4), однако легко приводится к линейной задаче.

Если использовать понятие арифметического плана, то минимизируемая функция становится линейной и транспортная задача переходит в линейную задачу. Однако условия (1.1) оказываются при этом менее симметричными.

Транспортная задача на сети  $(P, K)$  с функциями  $Q$ ,  $D$  и  $C$  в терминах арифметических планов состоит в минимизации линейной формы

$$L(X) = \sum_{k_{ij} \in K} c_{ij}x(k_{ij}) \quad (1.5)$$

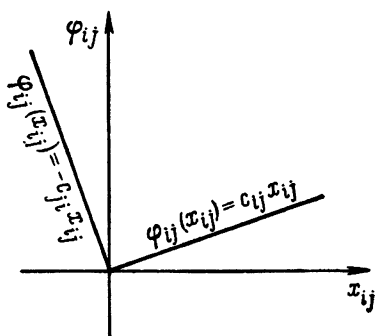


Рис. 11.1.

при условиях

$$x(p_i, P) - x(P, p_i) = q(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.6)$$

$$0 \leq x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K. \quad (1.7)$$

Если  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , — арифметический план, то

$$Y = y(k_{ij}) = x(k_{ij}) - x(k_{ji}), \quad k_{ij} \in K',$$

— алгебраический план.

Аналогично каждому алгебраическому плану  $Y = y(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , отвечает арифметический план

$$X = x(k_{ij}) = \begin{cases} y(k_{ij}) & \text{при } y(k_{ij}) \geq 0, \\ 0 & \text{при } y(k_{ij}) < 0 \end{cases} \quad (k_{ij} \in K).$$

Нетрудно проверить, что значения функций (1.4) и (1.5) на соответствующих друг другу алгебраическом и арифметическом планах  $Y$  и  $X$  равны, если  $x(k_{ij}) \times x(k_{ji}) = 0$  для  $k_{ij} \in K$ .

Соблюдение последнего условия делает указанное выше соответствие между алгебраическими и арифметическими планами взаимно однозначным, причем среди арифметических планов, минимизирующих функцию (1.5), имеется план, удовлетворяющий этому условию. Поэтому, если один из пары планов, связанных взаимно однозначным соответствием, обращает в минимум отвечающую ему функцию (1.4) или (1.5), то этим свойством обладает и другой план данной пары, т. е. задачи (1.1)—(1.4) и (1.5)—(1.7) эквивалентны. Ради краткости будем обозначать задачу (1.1)—(1.4) или (1.5)—(1.7) через  $T(q, d, c)$ .

Для разрешимости задачи  $T(q, d, c)$  необходимо и достаточно, чтобы существовал по крайней мере один план, совместимый с функциями  $q(p_i)$  и  $d(k_{ij})$ .

Необходимое условие разрешимости задачи  $T(q, d, c)$

$$\sum_{p_i \in P} q(p_i) = 0$$

было выведено в § 2 гл. 8. В дальнейшем мы будем считать это условие выполненным.

Отметим, что планы, совместимые с функциями  $q(p_i)$  и  $d(k_{ij})$ , будут называться также планами задачи  $T(q, d, c)$ .

План, на котором достигается минимум функции (1.4) или (1.5), будем, как обычно, называть оптимальным планом или решением соответствующей задачи.

1.2. Легко свести произвольную задачу  $T(q, d, c)$  к случаю, когда  $q(p_i) = 0$  для всех  $p_i$ , кроме двух — источника и стока.

Для этого достаточно: (1°) ввести два новых пункта сети  $p_0$  и  $p_{N+1}$ , (2°) из  $p_0$  направить коммуникации во все пункты производства, (3°) из каждого пункта потребления направить коммуникацию в  $p_{N+1}$ , (4°) доопределить  $d(k_{ij})$  следующим образом:

$$d(k_{0j}) = q(p_j), \quad d(k_{i, N+1}) = -q(p_i),$$

(где  $p_j$  — пункты производства,  $p_i$  — пункты потребления) и, наконец, (5°) положить

$$c(k_{0j}) = c(k_{i, N+1}) = 0.$$

Пусть

$$\bar{P} = \{P, p_0, p_{N+1}\}; \quad \bar{K} = \{K, k_{0j}, k_{i, N+1}\};$$

$\bar{D}$  и  $\bar{C}$  — указанные продолжения функций  $D$  и  $C$  на множество  $\bar{K}$ .

Положим

$$\bar{q}(p_i) = \begin{cases} \sum_{q(p_\lambda) > 0} q(p_\lambda), & i = 0, \\ \sum_{q(p_\lambda) < 0} q(p_\lambda), & i = N + 1, \\ 0 & \text{для } 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Задача  $T(q, d, c)$  эквивалентна задаче  $T(\bar{q}, \bar{d}, \bar{c})$ . Действительно, каждому плану  $X$  задачи  $T(q, d, c)$  отвечает план  $\bar{X}$  задачи  $T(\bar{q}, \bar{d}, \bar{c})$ , для которого

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} q(p_j), & \text{если } i = 0, q(p_j) > 0, \\ -q(p_i), & \text{если } j = N + 1, q(p_i) < 0, \\ x_{ij} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

причем оба плана связаны с одинаковыми транспортными затратами. С другой стороны, для любого плана  $\bar{X}$  задачи  $T(\bar{q}, \bar{d}, \bar{c})$

$$\bar{x}_{0j} = d_{0j} = q(p_j), \quad q(p_j) > 0,$$

$$\bar{x}_{i, N+1} = d_{i, N+1} = -q(p_i), \quad q(p_i) < 0.$$

Следовательно, система перевозок

$$x_{ij} = \bar{x}_{ij} \quad (i \neq 0, j \neq N+1)$$

составляет план  $X$  задачи  $T(q, d, c)$ , причем переход к плану  $X$  не изменяет величины суммарных транспортных затрат.

1.3. Анализ транспортных задач на сети  $(P, K)$  можно всегда проводить в предположении о связности этой сети. Действительно, если данная транспортная сеть не связна, то, как нетрудно показать, она разбивается на конечное число максимальных связных подсетей

$$(P_\alpha, K_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, t.$$

Поскольку пункты задачи, принадлежащие различным множествам  $P_\alpha$ , не связаны коммуникациями множества  $K$ , то задача  $T(q, d, c)$  эквивалентна  $t$  задачам  $T(q_\alpha, d_\alpha, c_\alpha)$ , где  $T(q_\alpha, d_\alpha, c_\alpha)$  — транспортная задача на сети  $(P_\alpha, K_\alpha)$ , а функции  $Q_\alpha$  и  $D_\alpha, C_\alpha$  совпадают с  $Q$  и  $D, C$  на множествах  $P_\alpha$  и  $K_\alpha$  соответственно.

В дальнейшем сеть  $(P, K)$  транспортной задачи  $T(q, d, c)$  будет считаться связной.

## § 2. Критерии оптимальности плана задачи $T(q, d, c)$

2.1. Транспортная задача  $T(q, d, c)$ , записанная в форме (1.5) — (1.7), может рассматриваться как задача линейного программирования с двусторонними ограничениями. Задача  $T(q, d, c)$  имеет  $s$  переменных  $x_{ij}$ , связанных  $N$  условиями-равенствами (1.6), где  $s$  — число коммуникаций  $k_{ij} \in K$ ,  $N$  — число пунктов  $p_i \in P$ .

Сформулируем критерий оптимальности плана задачи  $T(q, d, c)$ , справедливость которого непосредственно следует из теоремы 7.2 гл. 3 книги [52].

Свяжем с  $i$ -м условием системы (1.6), или, что то же самое, с пунктом  $p_i$  сети  $(P, K)$  число  $u_i$ . Пусть

$$U = (-u_1, -u_2, \dots, -u_N),$$

$P_{ij}$  — вектор условий задачи (1.5) — (1.7), отвечающий переменной  $x_{ij}$ .

Переменная  $x_{ij}$  содержится только в двух условиях системы (1.6): в  $i$ -м условии с коэффициентом 1 и  $j$ -м условии с коэффициентом  $-1$ .

Другими словами,  $i$ -я составляющая вектора  $P_{ij}$  равна 1,  $j$ -я составляющая  $P_{ij}$  равна  $-1$ , а остальные компоненты — нули.

Следовательно,

$$(U, P_{ij}) = u_j - u_i. \quad (2.1)$$

Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.2 гл. 3, и равенство (2.1) позволяют вывести из теоремы 7.2 гл. 3 книги [52] следующее утверждение.

**Теорема 2.1** (Критерий оптимальности плана задачи (1.5) — (1.7)). Для оптимальности плана  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , задачи (1.5) — (1.7) необходимо и достаточно существование чисел  $u_1, u_2, \dots, u_N$  таких, что

$$u_j - u_i = c(k_{ij}), \text{ если } 0 < x(k_{ij}) < d(k_{ij}), \quad (2.2)$$

$$u_j - u_i \leq c(k_{ij}), \text{ если } x(k_{ij}) = 0, \quad k_{ij} \in K, \quad (2.3)$$

$$u_j - u_i \geq c(k_{ij}), \text{ если } x(k_{ij}) = d(k_{ij}). \quad (2.4)$$

Числа  $u_i$ , связанные условиями (2.2) — (2.4) с оптимальным планом задачи (1.5) — (1.7), называются *потенциалами* соответствующих пунктов сети  $(P, K)$ . Совокупность потенциалов можно рассматривать как некоторую функцию  $u(p_i)$ , определенную на множестве  $P$ .

**2.2.** Пользуясь теоремой 2.1, нетрудно получить критерий оптимальности для задачи  $T(q, d, c)$ , записанной в форме (1.1) — (1.4).

**Теорема 2.2** (Критерий оптимальности плана задачи (1.1) — (1.4)). Для оптимальности плана

$X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , задачи (1.1) — (1.4) необходимо и достаточно существование чисел  $u_1, u_2, \dots, u_N$  таких, что

$$u_j - u_i = c(k_{ij}), \quad \text{если } 0 < x(k_{ij}) < d(k_{ij}), \quad (2.5)$$

$$u_j - u_i = -c(k_{ji}), \quad \text{если } -d(k_{ji}) < x(k_{ij}) < 0, \quad (2.6)$$

$$u_j - u_i \geq c(k_{ij}), \quad \text{если } x(k_{ij}) = d(k_{ij}), \quad (2.7)$$

$$u_j - u_i \leq -c(k_{ji}), \quad \text{если } x(k_{ij}) = -d(k_{ji}), \quad (2.8)$$

$$-c(k_{ji}) \leq u_j - u_i \leq c(k_{ij}), \quad \text{если } x(k_{ij}) = 0, \quad k_{ij} \in K'. \quad (2.9)$$

Заметим, что в условии (2.9) величина  $c(k_{ij})$ , как обычно, считается равной бесконечности при  $k_{ij} \notin K$ .

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 предоставляется читателю.

### § 3. Опорные планы и основные коммуникации плана задачи $T(q, d, c)$

**3.1.** При анализе задач типа  $T(q, d, c)$  используется понятие опорного плана перевозок. Арифметический план  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , называется *опорным*, если невозможно составить замкнутый маршрут из коммуникаций  $k_{ij} \in K$ , для которых

$$0 < x(k_{ij}) < d(k_{ij}). \quad (3.1)$$

Можно проверить, что приведенное определение эквивалентно обычному определению опорного плана задачи  $T(q, d, c)$ , рассматриваемой в качестве общей задачи линейного программирования с двусторонними ограничениями.

Если план перевозок  $X$  записан в алгебраических терминах, то определение опорности переходит в следующее. Алгебраический план  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , называется *опорным*, если невозможно составить направленный замкнутый маршрут из коммуникаций  $k_{ij} \in K'$ , для которых

$$x(k_{ij}) \neq d_{ij}, \quad 0, \quad -d_{ji}. \quad (3.2)$$

Коммуникации  $k_{ij}$ , удовлетворяющие требованию (3.1) в случае арифметического плана и условию (3.2) при алгебраической записи плана, называются *основными* коммуникациями плана  $X$ . Поэтому опорный план можно

также определить как план, из основных коммуникаций которого невозможно составить замкнутый маршрут (направленный в случае алгебраического плана).

3.2. Приводимые ниже рассуждения показывают, что по имеющемуся плану перевозок  $X$  можно построить опорный план  $X'$ , не увеличивая при этом суммарных транспортных затрат.

Ограничимся случаем алгебраического плана. Если план  $X$  не является опорным, то существует направленный замкнутый маршрут  $\gamma$ , составленный из его основных коммуникаций. Пусть  $X(\theta)$  отличается от  $X$  перевозками

$$x(k_{ij}, \theta) = x(k_{ij}) + \theta \quad \text{при } k_{ij} \in \gamma.$$

Поскольку значения перевозок  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in \gamma$ , лежат внутри интервалов линейности функций  $\phi_{ij}(x_{ij})$ , то при малых по абсолютной величине значениях параметра  $\theta$

$$\Phi(X(\theta)) = \Phi(X) + \beta\theta, \text{ где } \beta = \text{const.}$$

Если  $\beta < 0$ , то будем увеличивать  $\theta$  до тех пор, пока одна из перевозок маршрута  $\gamma$  станет равной своему граничному значению ( $d_{ij}$ , 0 или  $-d_{ji}$ ).

Если  $\beta \geq 0$ , то необходимо уменьшать \*) параметр  $\theta$ , придавая ему отрицательные значения, до тех пор, пока опять-таки одна из перевозок маршрута  $\gamma$  станет равной своему граничному значению. В обоих случаях приходим к новому плану, имеющему меньшее число основных коммуникаций и не большее значение суммарных транспортных расходов. Если полученный план не является опорным, повторяем описанный процесс, исходя из нового замкнутого маршрута.

Через несколько шагов приходим к опорному плану  $X'$ , для которого

$$\Phi(X') \leq \Phi(X).$$

Конечность числа шагов вытекает из того, что на каждом из них число основных коммуникаций сокращается.

---

\*) При  $\beta = 0$  возможен случай, когда для достижения нашей цели параметр  $\theta$  необходимо увеличивать:  $x(k_{ij}) < 0$ ,  $d_{ji} = \infty$ ,  $c_{ij} = 0$  для всех  $k_{ij} \in \gamma$ .

Итак, доказана

**Теорема 3.1.** *Любой план задачи  $T(q, d, c)$  может быть преобразован в ее опорный план без увеличения суммарных транспортных затрат.*

#### § 4. Матричные и сетевые постановки транспортных задач

4.1. Задачи  $T$  и  $T_d$ , рассмотренные в гл. 3—6, обычно называют *матричными* постановками транспортных задач. Это связано с тем, что исходные данные и планы задач  $T$  и  $T_d$  удобно записывать в виде прямоугольных таблиц (матриц), а процесс отыскания их решений чаще всего складывается из ряда преобразований, осуществляемых над прямоугольными матрицами.

Задачи (1.1)—(1.4) или (1.5)—(1.6), формулировки которых связаны с сетями, естественно называть *сетевыми* постановками транспортной задачи.

Матричная постановка транспортной задачи, как уже отмечалось, эквивалентна сетевой постановке для простой транспортной сети, в которой нет перевалочных пунктов, пункты производства лишь вывозят продукт, а пункты потребления только получают продукт. Мы сейчас покажем, что верно и обратное: любая задача типа  $T(q, d, c)$  может быть сведена к некоторой задаче вида  $T_d$ .

Итак, пусть  $T(q, d, c)$  — транспортная задача на сети  $(P, K)$ , записанная в виде (1.5)—(1.7). Положим

$$q = \sum_{q(p_i) > 0} q(p_i) = \sum_{p_i \in P_+} q(p_i)$$

( $q$  — общее количество продукта, имеющееся в пунктах производства).

4.2. Введем в рассмотрение задачу  $T_d$ , состоящую в минимизации линейной формы

$$C(Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{c}_{ij} z_{ij} \quad (4.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^N z_{ij} = q + q(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^N z_{ij} = q, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

$$0 \leq z_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

где  $N$  — число пунктов сети  $(P, K)$ ;

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c(k_{ij}), & \text{если } k_{ij} \in K, \\ 0, & \text{если } i = j, \\ \infty, & \text{если } i \neq j \text{ и } k_{ij} \notin K, \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} d(k_{ij}), & \text{если } k_{ij} \in K, \\ \infty, & \text{если } k_{ij} \notin K. \end{cases}$$

1. Допустим, что задача (4.1) — (4.4) разрешима, причем минимальное значение линейной формы (4.1) конечно. Пусть  $\|z_{ij}\|_N$  — оптимальный план этой задачи. В силу определения чисел  $\bar{c}_{ij}$  перевозка  $z_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$  и  $k_{ij} \notin K$ . Положим

$$x(k_{ij}) = z_{ij} \text{ для } k_{ij} \in K. \quad (4.5)$$

Условия (4.2) — (4.3) можно теперь переписать в виде

$$\sum_{k_{ij} \in E'_i} x(k_{ij}) + z_{ii} = q + q(p_i),$$

$$\sum_{k_{ij} \in E''_j} x(k_{ij}) + z_{jj} = q.$$

Здесь  $E'_i (E''_j)$  — множество коммуникаций, исходящих из  $p_i$  (входящих в  $p_j$ ).

Вычитая из верхнего равенства для  $i = \lambda$  нижнее равенство при  $j = \lambda$ , получаем

$$x(p_\lambda, P) - x(P, p_\lambda) = \sum_{k_{\lambda j} \in E'_\lambda} x(k_{\lambda j}) - \sum_{k_{i\lambda} \in E''_\lambda} x(k_{i\lambda}) = q(p_\lambda),$$

$$\lambda = 1, \dots, N.$$

Из (4.4) следует, что

$$0 \leq x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}).$$

Таким образом, функция  $x(k_{ij})$ , определенная на множестве  $K$  равенствами (4.5), является планом задачи (1.5) — (1.7). При этом значения линейных форм (1.5) и (4.1) на планах  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , и  $Z = \|z_{ij}\|_N$  соответственно равны. Покажем, что план  $X$  — решение задачи (1.5) — (1.7). Пусть существует план  $X' = x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , связанный с суммарными транспортными расходами

$$L(X') < L(X) = C(Z). \quad (4.6)$$

Будем считать, что сеть  $(P, K)$  не имеет направленных замкнутых маршрутов, составленных из коммуникаций  $k_{ij}$ , для которых  $x'(k_{ij}) > 0$ . Это предположение не снижает общности, так как в противном случае, уменьшая значения перевозок вдоль замкнутых маршрутов, получаем новый план  $x''(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , обладающий отмеченным свойством, причем

$$L(X'') \leq L(X')$$

(см. доказательство теоремы 3.1).

План  $X''$  можно взять вместо  $X'$ , не нарушив при этом условие (4.6).

Положим

$$z'_{ij} = \begin{cases} x'(k_{ij}), & \text{если } k_{ij} \in K, \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и } k_{ij} \notin K, \\ q - \sum_{k_{ij} \in E_j} x'(k_{ij}) & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (4.7)$$

В соответствии с (4.7)

$$\sum_{i=1}^N z'_{ij} = \sum_{k_{ij} \in E_j} x'(k_{ij}) - \sum_{k_{ij} \in E_j} x'(k_{ij}) + q = q, \\ i = 1, 2, \dots, N.$$

Далее, согласно условиям (1.6) и представлению (4.7),

$$\sum_{j=1}^N z'_{ij} = \sum_{k_{ij} \in E_i} x'(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E_i} x'(k_{ji}) + q = q + q_i, \\ i = 1, 2, \dots, N.$$



Неравенства (4.9) и (4.10) приводят к соотношению

$$x'(\Gamma_1, p_j) \leq \sum_{\lambda=1}^t q(\Gamma_\lambda) \leq q,$$

эквивалентному (4.8).

Итак, система чисел  $Z' = \|z'_{ij}\|_N$ , определяемая формулой (4.7), является планом задачи (4.1) — (4.4). При этом

$$L(X') = C(Z').$$

Сравнивая последнее равенство с неравенством (4.6), приходим к соотношению

$$C(Z') < C(Z),$$

которое противоречит оптимальности плана  $Z$ .

Следовательно, (4.6) невозможно, т. е. система перевозок  $X$ , связанная с планом  $Z$  равенствами (4.5), действительно составляет решение задачи (1.5) — (1.7).

2. Рассмотрим другую возможность, к которой может привести исследование задачи (4.1) — (4.4): условия (4.2) — (4.4) противоречивы либо минимальное значение линейной формы (4.1) равно бесконечности. Эта возможность эквивалентна несовместности системы, составленной из условий (4.2) — (4.4) и ограничений

$$z_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \text{ и } k_{ij} \notin K. \quad (4.11)$$

Покажем, что несовместность системы (4.2) — (4.4), (4.11) возможна лишь в том случае, если задача (1.5) — (1.7) не имеет ни одного плана.

Действительно, пусть  $X'$  — некоторый план задачи (1.5) — (1.7). Как мы видели, предположение об отсутствии направленных замкнутых маршрутов, составленных из коммуникаций сети  $(P, K)$ , вдоль которых перевозится положительное количество продукта, не снижает общности рассуждений. Следовательно, по доказанному матрица  $Z' = \|z'_{ij}\|_N$ , определяемая формулой (4.7), является планом задачи (4.1) — (4.4). В соответствии с определением чисел  $z'_{ij}$  план  $Z'$  удовлетворяет также требованиям (4.11).

Итак, предположение существования плана у задачи (1.5) — (1.7) приводит к разрешимости системы (4.2) — (4.4), (4.11), что и служит доказательством нашего

утверждения. Сформулируем полученные выводы в виде теоремы.

**Теорема 4.1.** *Анализ произвольной транспортной задачи на сети, содержащей  $N$  пунктов, может быть сведен к решению некоторой транспортной задачи типа  $T_d$  с  $N$  пунктами производства и  $N$  пунктами потребления.*

**4.3.** В некоторых случаях размеры эквивалентной задачи в матричной постановке могут быть существенно сокращены.

Рассмотрим транспортную задачу  $T(q, d, c) = T(q, c)$  на сети  $(P, K)$ , все коммуникации которой имеют неограниченную пропускную способность, т. е.  $d(k_{ij}) = \infty$  для всех  $k_{ij} \in K$ .

Пусть  $P_+$  — множество пунктов производства задачи,  $P_-$  — множество ее пунктов потребления. Для дальнейшего удобно иметь различные обозначения для пунктов производства и пунктов потребления. Положим

$$P_+ = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_m\}, \quad P_- = \{p''_1, p''_2, \dots, p''_n\}.$$

Для каждой пары пунктов  $p'_\lambda \in P_+$  и  $p''_\mu \in P_-$  составим наиболее экономный направленный маршрут  $l_{\lambda\mu}$  из  $p'_\lambda$  в  $p''_\mu$ , состоящий из коммуникаций  $k_{ij} \in K$ . Обозначим величину  $c(l_{\lambda\mu})$  транспортных расходов маршрута  $l_{\lambda\mu}$  через  $r_{\lambda\mu}$ . Если не существует ни одного маршрута из  $p'_\lambda$  в  $p''_\mu$ , то величина  $r_{\lambda\mu}$  полагается равной бесконечности.

Оптимальные маршруты  $l_{\lambda\mu}$  и числа  $r_{\lambda\mu}$  могут быть определены, например, методом Беллмана — Шимбела, описанным в § 3 гл. 9.

Введем в рассмотрение транспортную задачу, состоящую в минимизации линейной формы

$$R(Z) = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu=1}^n r_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu} \quad (4.12)$$

при условиях

$$\sum_{\mu=1}^n z_{\lambda\mu} = q(p'_\lambda), \quad \lambda = 1, 2, \dots, m, \quad (4.13)$$

$$\sum_{\lambda=1}^m z_{\lambda\mu} = -q(p''_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, n, \quad (4.14)$$

$$z_{\lambda\mu} \geq 0. \quad (4.15)$$

Решение задачи (4.12)—(4.15) определяет оптимальный набор поставок из пунктов производства  $p'_\lambda$  в пункты потребления  $p''_\mu$  при условии, что используются только наиболее экономные маршруты сети  $(P, K)$ . Рассуждения, приводимые ниже, устанавливают эквивалентность задач (1.5)—(1.7) и (4.12)—(4.15).

Задача (4.12)—(4.15) разрешима, так как

$$\sum_{p'_\lambda \in P_+} q(p'_\lambda) = \sum_{p''_\mu \in P_-} \{-q(p''_\mu)\}.$$

Пусть  $Z = \|z_{ij}\|_{m,n}$  — оптимальный план задачи.

1. Допустим вначале, что  $R(Z) < \infty$ . В этом случае

$$z_{\lambda\mu} = 0, \text{ если } c(l_{\lambda\mu}) = r_{\mu\lambda} = \infty. \quad (4.16)$$

Для каждой пары пунктов  $p'_\lambda \in P_+$  и  $p''_\mu \in P_-$ , для которых  $r_{\lambda\mu} < \infty$ , определим систему перевозок  $x_{\lambda\mu}(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , положив

$$x_{\lambda\mu}(k_{ij}) = \begin{cases} z_{\lambda\mu}, & \text{если } k_{ij} \in l_{\lambda\mu}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Пусть

$$X = x(k_{ij}) = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu=1}^n x_{\lambda\mu}(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K. \quad (4.18)$$

Из условий (4.13)—(4.15) и (4.17), которым удовлетворяют компоненты плана  $Z$ , следует, что  $X$  является планом задачи (1.5)—(1.7).

Кроме того,

$$C(X) = R(Z). \quad (4.19)$$

Убедимся в оптимальности плана  $X$ . Для этого достаточно доказать, что для любого плана  $X'$  задачи  $T(q, c)$  существует план  $Z'$  задачи (4.12)—(4.15), связанный с  $X'$  неравенством

$$R(Z') \leq C(X'). \quad (4.20)$$

Действительно, учитывая оптимальность плана  $Z$  и условия (4.19), (4.20), приходим к соотношению

$$C(X) = R(Z) \leq R(Z') \leq C(X'),$$

справедливому для любого плана  $X'$  задачи (1.5)—(1.7).

Итак, пусть  $X'$  — произвольный план задачи (1.5)—(1.7). Без ограничения общности будем считать  $X'$  опор-

ным планом, так как в противном случае, согласно теореме 3.1, можно перейти к опорному плану  $X''$ , для которого

$$C(X'') \leq C(X'),$$

и применить к нему последующие рассуждения.

Для каждой пары пунктов  $p'_\lambda$  и  $p''_\mu$  существует не более одного направленного маршрута из  $p'_\lambda$  в  $p''_\mu$ , составленного из основных коммуникаций плана  $X'$ . Выберем произвольную пару пунктов  $p'_\lambda$  и  $p''_\mu$ , для которой указанный маршрут  $l_1$  существует, и положим

$$Y_1 = y_1(k_{ij}) = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } k_{ij} \in l_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4.21)$$

где

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \min_{k_{ij} \in l_1} [x'(k_{ij})], q(p'_\lambda), -q(p''_\mu) \right\}. \quad (4.22)$$

Затем обратимся к системе перевозок

$$X' - Y_1,$$

являющейся планом задачи  $T(q_1, c)$ , где

$$q_1(p_i) = \begin{cases} q(p_i) & \text{при } p_i \neq p'_\lambda, p''_\mu, \\ q(p_i) + \varepsilon_1 & \text{при } p_i = p''_\mu, \\ q(p_i) - \varepsilon_1 & \text{при } p_i = p'_\lambda, \end{cases}$$

выберем пару пунктов  $p'_\lambda, p''_\mu$  ( $q_1(p'_\lambda) > 0, q_1(p''_\mu) < 0$ ), которые можно связать направленным маршрутом  $l_2$  из основных коммуникаций плана  $X' - Y_1$ , и построим систему перевозок  $Y_2$ , пользуясь формулами (4.21), (4.22), в которых вместо индекса 1 стоит 2.

Продолжаем описанный процесс до тех пор, пока это возможно. Поскольку на каждом шаге либо сокращается число основных коммуникаций, либо уменьшается количество пунктов производства или потребления, то через конечное число шагов получим опорный план перевозок

$$X_0 = X' - \sum_{i=1}^t Y_i$$

задачи  $T(q_t, c)$ , обладающий следующим свойством. Если  $q_t(p'_\lambda) > 0$  и  $q_t(p''_\mu) < 0$ , то не существует направленного маршрута из  $p'_\lambda$  в  $p''_\mu$ , составленного из основных коммуникаций плана  $X_0$ .

Нетрудно проверить, что  $X_0 = 0$ . Действительно, пусть для некоторой коммуникации  $k_{ij}$  перевозка  $x_0(k_{ij}) > 0$ . Учитывая условия (1.6) при  $q = q_t$ , которым удовлетворяет опорный план  $X_0$ , приходим к двум парам альтернатив:

а)  $q_t(p_j) < 0$ , либо для некоторого  $j_1$  перевозка  $x_0(k_{j_1 i}) > 0$ ;

б)  $q_t(p_i) > 0$ , либо  $x_0(k_{i i_1}) > 0$  при некотором  $i_1$ .

Применяя те же рассуждения к коммуникациям  $k_{i i_1}$ ,  $k_{j_1 i_1}$ , и т. д. и учитывая опорность плана  $X_0$ , приходим к выводу о существовании направленного маршрута из основных коммуникаций  $X_0$ , который связывает некоторую пару пунктов производства и потребления задачи  $T(q_t, c)$ . Получили противоречие, которое устранимо лишь при  $X_0 = 0$ .

Таким образом,

$$X' = \sum_{i=1}^t Y_i. \quad (4.23)$$

Определим наборы чисел  $z'_{\lambda\mu}$  и  $r'_{\lambda\mu}$  для  $1 \leq \lambda \leq m$ ,  $1 \leq \mu \leq n$  следующим образом. Если пункты  $p'_\lambda$  и  $p''_\mu$ , связанные маршрутом  $l_s$ , участвовали в построении  $Y_s$ , то

$$z'_{\lambda\mu} = e_s, \quad r'_{\lambda\mu} = c(l_s);$$

если же они не участвовали в построении ни одного из  $Y_i$ , то

$$z'_{\lambda\mu} = 0, \quad r'_{\lambda\mu} = \infty.$$

В соответствии с равенством (4.23) матрица  $Z' = \|z'_{\lambda\mu}\|_{m,n}$  является планом задачи (4.12) – (4.15), причем

$$C(X') = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu=1}^n r'_{\lambda\mu} z'_{\lambda\mu}.$$

Поскольку  $r'_{\lambda\mu}$  — величина транспортных расходов

некоторого маршрута из  $p'_\lambda$  в  $p''_\mu$ , то

$$r_{\lambda\mu} \leq r'_{\lambda\mu}.$$

Следовательно,

$$R(Z') = \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu=1}^n r_{\lambda\mu} z'_{\lambda\mu} \leq \sum_{\lambda=1}^m \sum_{\mu=1}^n r'_{\lambda\mu} z'_{\lambda\mu} = C(X').$$

Искомый план  $Z'$  построен, что доказывает оптимальность плана  $Z$ .

2. Пусть теперь  $R(Z) = \infty$ . В таком случае условия задачи  $T(q, c)$  противоречивы. В самом деле, предположив противное, т. е. существование некоторого плана  $X'$  задачи  $T(q, c)$ , можно построить план  $Z'$  задачи (4.12) — (4.15), для которого

$$R(Z') \leq C(X') < \infty.$$

Получили противоречие. Следовательно, условия задачи несовместны.

Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** *Анализ произвольной задачи типа  $T(q, c)$  с  $m$  пунктами производства и  $n$  пунктами потребления сводится к решению некоторой задачи типа  $T$  с тем же числом пунктов.*

*Матрица  $R$  транспортных издержек эквивалентной задачи определяется путем построения системы оптимальных маршрутов между пунктами производства и пунктами потребления исходной задачи.*

**4.4.** Способ формирования экономной эквивалентной матричной постановки, изложенный в предыдущем параграфе, применим только к задачам типа  $T(q, c)$ . Однако, как мы сейчас убедимся, любая задача  $T(q, d, c)$  может быть сведена к транспортной задаче на сети, коммуникации которой имеют неограниченную пропускную способность. Рассмотрим произвольную коммуникацию  $k_{ij}$  сети  $(P, K)$ , имеющую ограниченную пропускную способность  $d_{ij}$ .

Преобразуем транспортную сеть  $(P, K)$  в сеть  $(P_1, K_1)$  следующим образом. Добавим пункты  $s'$  и  $s''$  и коммуникации из  $p_i$  в  $s'$ , из  $s''$  в  $p_j$  и из  $s''$  в  $s'$ ;

исключим коммуникацию  $k_{ij}$  (рис. 11.2). Далее доопределим функции  $Q$ ,  $D$  и  $C$ , положив

$$\begin{aligned} q(s') &= -d_{ij}, & q(s'') &= d_{ij}, \\ c(p_i, s') &= c(s'', s') = 0, & c(s'', p_j) &= c_{ij}, \\ d(p_i, s') &= d(s'', s') = d(s'', p_j) = \infty. \end{aligned}$$

Пусть  $T_1(q, d, c)$  — транспортная задача на сети  $(P_1, K_1)$ , связанная с доопределенными выше функциями  $Q$ ,  $D$  и  $C$ . Покажем, что задачи  $T(q, d, c)$  и  $T_1(q, d, c)$

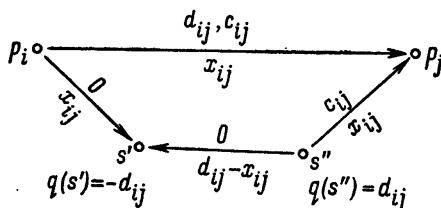


Рис. 11.2.

эквивалентны. Действительно, рассмотрим произвольный план  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , задачи  $T(q, d, c)$ . Если положить

$$x(p_i, s') = x(s'', p_j) = x(k_{ij}), \quad x(s'', s') = d_{ij} - x_{ij},$$

то функция  $X_1 = x(k_{\lambda\mu})$ ,  $k_{\lambda\mu} \in K_1$ , является планом задачи  $T_1(q, d, c)$ , причем

$$C(X) = C(X_1). \quad (4.24)$$

Пусть теперь  $X_1 = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K_1$ , произвольный план задачи  $T_1(q, d, c)$ . Очевидно,

$$x(p_i, s') = x(s'', p_j) = x_{ij}, \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}.$$

Следовательно, считая  $x(k_{ij}) = x_{ij}$ , получаем, что  $X = x(k_{\lambda\mu})$ ,  $k_{\lambda\mu} \in K$ , — план задачи  $T(q, d, c)$ , причем снова имеет место равенство (4.24).

Итак, можно освободиться от коммуникации с ограниченной пропускной способностью за счет введения двух новых пунктов в транспортную сеть. Применяв описанный прием ко всем  $k_{ij} \in K$ , для которых  $d_{ij} < \infty$ , приходим к эквивалентной задаче  $T(q, c)$  с числом  $m + \gamma$

пунктов производства и  $n + \gamma$  пунктов потребления. Здесь  $m$  и  $n$  обозначают соответственно количество пунктов производства и пунктов потребления исходной задачи, а  $\gamma$  равно числу коммуникаций  $k_{ij} \in K$ , имеющих ограниченную пропускную способность.

В заключение параграфа необходимо отметить следующее. Транспортные задачи на сети типа  $T(q, c)$  целесообразно сводить к матричному виду, пользуясь рекомендациями п. 4. 3. Это преобразование существенно сокращает последующий анализ в случае, когда исходная задача имеет много перевалочных пунктов.

Если функция  $d(k_{ij})$  принимает конечное значение на сравнительно небольшом числе коммуникаций  $k_{ij} \in K$ , а число перевалочных пунктов задачи значительно, то имеет смысл перейти сначала к эквивалентной задаче типа  $T(q, c)$  с тем, чтобы привести ее далее к матричному виду методом п. 4.3. Задачи типа  $T(q, d, c)$  большого объема, в которых многие коммуникации имеют ограниченную пропускную способность, вряд ли целесообразно приводить к матричному виду. Выгоднее решать их, пользуясь одним из методов анализа транспортных задач на сетях, описанию которых посвящена последующая глава. При ручном счете сетевые транспортные задачи имеют преимущество перед матричными постановками, вытекающее из наглядности их формулировки. Часто графическое изображение задачи позволяет строить приемлемый вариант без каких бы то ни было формальных алгоритмов.

Методы решения транспортных задач в матричной форме могут быть естественным образом модифицированы и использованы для решения транспортных задач в сетевой постановке.

В настоящей главе рассматриваются произвольные задачи типа  $T(q, d, c)$ , связанные с транспортной сетью  $(P, K)$ .

§§ 1 и 2 главы посвящены распространению метода потенциалов на задачи  $T(q, d, c)$ . В § 3 приводится метод замкнутых маршрутов для решения задачи  $T(q, d, c)$ . Этот метод близок по идее к методу потенциалов, но отличается от него сокращением суммарных транспортных издержек на каждой итерации. В §§ 4—6 венгерский метод решения задачи  $T_d$  распространяется на задачи  $T(q, d, c)$ .

## § 1. Метод потенциалов для задачи типа $T(q, d, c)$

1.1. Описанный ниже метод решения задачи  $T(q, d, c)$  является естественным распространением метода потенциалов для транспортных задач с ограниченными пропускными способностями коммуникаций (см. § 8 гл. 4). Поэтому целесообразно сохранить за методом то же название.

Будем предполагать, что задачи  $T(q, d, c)$  сформулированы в терминах, связанных с алгебраическими планами, т. е. с функциями  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , удовлетворяющими условиям

$$x(p_i, P) = \sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) = q(p_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$x(k_{ij}) \leq d(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K', \quad (1.2)$$

$$x(k_{ij}) = -x(k_{ji}). \quad (1.3)$$

Оптимальный план задачи обращает в минимум суммарные транспортные расходы

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} \sum_{k_{ij} \in K'} \varphi_{ij}(x(k_{ij})). \quad (1.4)$$

(Определение  $\varphi_{ij}(x_{ij})$  см. п. 1.1 гл. 11.)

Прежде чем приступить к изложению метода, уточним понятие невырожденного опорного плана транспортной задачи на сети.

Пусть  $X$  — опорный план задачи  $T(q, d, c)$ . Объединим в множество  $K_X$  основные коммуникации этого плана. План  $X$  назовем *невырожденным*, если сеть  $(P, K_X)$  связна, т. е. если любые два пункта множества  $P$  могут быть соединены маршрутом, состоящим из коммуникаций  $k_{ij} \in K_X$ . Задача  $T(q, d, c)$ , все опорные планы которой обладают свойством невырожденности, называется *невырожденной*.

Заметим, что в соответствии с определением основной коммуникации алгебраического плана, пункты  $p_i$  и  $p_j$  либо не связаны коммуникациями множества  $K_X$ , либо соединены двумя противоположными коммуникациями множества  $K_X$ . Поэтому можно считать множество  $K_X$  невырожденного опорного плана  $X$  направленно связным.

**Теорема 1.1.** *Множество  $K_X$  состоит ровно из  $(N-1)$  пар противоположных коммуникаций, где  $N$  — общее число пунктов задачи.*

Назовем пункты транспортной сети, связанные хотя бы одной коммуникацией, *соседними*. Введем обозначения:

$P_1$  — множество пунктов сети  $(P, K_X)$ ,  
соседних с пунктом  $p_1$ ;

$P_i$  ( $i=2, 3, \dots$ ) — множество пунктов сети  $(P, K_X)$ ,  
соседних с одним из пунктов  
множества  $P_{i-1}$ .

Множества  $P_i$ ,  $i=1, 2, \dots$ , не имеют общих пунктов, поскольку предположение противного приводит к существованию замкнутого маршрута из коммуникаций множества  $K_X$ , что несовместимо с опорностью плана  $X$ . Отсюда, в частности, вытекает существование числа  $t$ , начиная с которого (при  $i > t$ ) множества  $P_i$  не содержат ни одного пункта.

Из связности сети  $(P, K_X)$  вытекает, что объединение множеств  $P_i$ ,  $i=0, 1, \dots, t$ , совпадает с множеством  $P$  (здесь  $P_0 = \{p_1\}$ ).

Поставим в соответствие каждому пункту  $p_\lambda \in P_i$  пару противоположных коммуникаций  $k_{\lambda\mu}$  и  $k_{\mu\lambda}$  из  $K_X$ , где  $\mu$  — номер пункта  $p_\mu \in P_{i-1}$ , соседнего с  $p_\lambda$  ( $i=1, 2, \dots, t$ ). Множество всех таких коммуникаций обозначим через  $\bar{K}_X$ .

Учитывая доказанные равенства

$$P = \bigcup_{0 \leq i \leq t} P_i, \quad P_{i_1} \cap P_{i_2} = \emptyset \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2, \quad (1.5)$$

получаем, что  $\bar{K}_X$  состоит из  $N-1$  пар противоположных коммуникаций. Поэтому доказательство нашего утверждения сводится к проверке равенства

$$\bar{K}_X = K_X. \quad (1.6)$$

Пусть  $k_{ij}$  — произвольная коммуникация множества  $K_X$ . В соответствии с определением множества  $\bar{K}_X$  и первым равенством (1.5) существует маршрут  $l$  из коммуникаций  $\bar{K}_X$ , связывающий пункты  $p_i$  и  $p_j$ . Если бы  $k_{ij} \notin \bar{K}_X$ , то коммуникации маршрута  $l$  и коммуникация  $k_{ij} \notin l$  составляли бы замкнутый маршрут, что противоречит опорности плана  $X$ .

Следовательно,  $k_{ij} \in \bar{K}_X$ . Равенство (1.6), а вместе с ним и теорема 1.1 доказаны.

Итак,  $K_X$  состоит из  $N-1$  пар противоположных коммуникаций, причем для любого пункта множества  $P_i$  существует единственный соседний пункт из множества  $P_{i-1}$ .

Множества  $P_i$  могут быть использованы для отыскания направленного маршрута из  $p_1$  в произвольный пункт  $p_\mu \in P$ . Действительно, пусть  $p_\mu \in P_s$ . В каждом из множеств  $P_\alpha$  для  $\alpha \leq s$  выделим пункт  $p_{i_\alpha}$ , руководствуясь правилом:

$$p_{i_s} = p_\mu; \quad p_{i_t} \text{ и } p_{i_{t+1}} - \text{соседние пункты.}$$

В соответствии с доказанным пункт  $p_{i_t}$  однозначно определяется пунктом  $p_{i_{t+1}}$ , причем  $k_{i_t i_{t+1}} \in K_X$ .

Маршрут, проходящий через пункты

$$p_1 = p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{s-1}}, p_{i_s} = p_\mu,$$

является искомым.

1.2. Процесс решения задачи  $T(q, d, c)$  методом потенциалов складывается из конечного числа итераций. Отдельная итерация подразделяется на два этапа. На первом этапе проверяется на оптимальность опорный план, полученный ранее. Если имеющийся план не удовлетворяет условиям оптимальности, то на втором этапе строится новый опорный план. Изложение метода проводится в предположении о невырожденности задачи  $T(q, d, c)$ . Необходимые замечания относительно общего случая будут сделаны ниже.

Остановимся подробно на отдельной итерации метода. Допустим, что предыдущие итерации привели к опорному плану  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ .

Этап 1. Выбирается произвольный пункт множества  $P$ , например  $p_1$ , и, отправляясь от него, формируется система предварительных потенциалов  $u_i = u(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , плана  $X$ , т. е. система чисел, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} u(p_j) - u(p_i) = \\ = \begin{cases} c_{ij} = c(p_i, p_j) = c(k_{ij}) & \text{при } x(k_{ij}) > 0, k_{ij} \in K_X, \\ -c_{ji} = -c(p_j, p_i) = -c(k_{ji}) & \text{при } x(k_{ij}) < 0, k_{ij} \in K_X. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для этого составляются множества  $P_0 = \{p_1\}$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_t$ , рассмотренные в п. 1.1.

Предварительные потенциалы  $u(p_i)$  вычисляются последовательно для пунктов, принадлежащих  $P_0, P_1, P_2, \dots$  и т. д., в соответствии с правилом

$$u(p_1) = 0, \quad u(p'') - u(p') = \begin{cases} c(p', p'') & \text{при } x(p', p'') > 0, \\ -c(p'', p') & \text{при } x(p', p'') < 0, \end{cases}$$

если  $p'' \in P_i$ , а  $p' \in P_{i-1}$ , причем  $p'$  и  $p''$  — соседние пункты сети  $(P, K_X)$ .

Учитывая свойства множеств  $P_i$ , изложенные в п. 1.1, приходим к выводу, что отмеченное правило позволяет

однозначно вычислить значения  $u(p_i)$  для всех  $p_i \in P$ , удовлетворяющие системе равенств (1.7).

Далее для каждой неосновной коммуникации  $k_{ij} \in K'$  составляется разность потенциалов  $u(p_j) - u(p_i)$ . Если выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} -c_{ji} &\leq u(p_j) - u(p_i) \leq c_{ij} && \text{при } x(k_{ij}) = 0, \\ u(p_j) - u(p_i) &\geq c_{ij} && \text{при } x(k_{ij}) = d_{ij}, \\ u(p_j) - u(p_i) &\leq -c_{ji} && \text{при } x(k_{ij}) = -d_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

то в соответствии с критерием оптимальности (теорема 2.2 гл. 11) план  $X$  — решение задачи. Если же хотя бы одно из условий (1.8) оказывается нарушенным, то переходят к этапу 2.

Неравенства (1.8) либо одновременно соблюдаются для пары противоположных коммуникаций  $k_{ij}$  и  $k_{ji}$ , либо не выполняются ни для одной из этих коммуникаций. Поэтому при фиксированных  $p_i$  и  $p_j$  требования (1.8) проверяются один раз (для  $k_{ij}$  или для  $k_{ji}$ ).

Этап 2. Рассматриваются пары пунктов сети, для которых условия (1.8) нарушены. Среди них выбирается некоторая пара  $p_\lambda, p_\mu$ . Критерием выбора может служить, например, величина невязки нарушенного неравенства системы (1.8). Дальнейшее течение этапа зависит от того, какое из условий (1.8) при  $i=\lambda$  и  $j=\mu$  не соблюдается. Остановимся на каждой из возможностей.

а) Нарушена правая часть первого неравенства системы (1.8)

$$u(p_\mu) - u(p_\lambda) > c_{\lambda\mu}, \quad x(k_{\lambda\mu}) = 0.$$

Очевидно, это возможно только в случае  $c_{\lambda\mu} < \infty$ , т. е. при  $k_{\lambda\mu} \in K$ .

Строится направленный маршрут  $l$  из  $p_\mu$  в  $p_\lambda$ , используя коммуникации  $k_{ij} \in K_X$ . Эта операция может быть осуществлена с помощью последовательного формирования множеств  $P_i$  так, как описывалось в п. 1.1, причем в качестве исходного принимается пункт  $p_\mu$ . Образование множеств  $P_i$  производится до тех пор, пока пункт  $p_\lambda$  попадет в множество  $P_s$  при некотором  $s$ . Далее разыскивается пункт  $p_{\lambda_{s-1}}$ , соседний с  $p_\lambda$  в смы-

сле сети  $(P, K_X)$  и расположенный в  $P_{s-1}$ . Аналогично переходят от  $p_{\lambda_{s-1}}$  к  $p_{\lambda_{s-2}} \in P_{s-2}$  и т. д. В результате получают направленный маршрут  $l$  вида

$$k_{\mu\lambda_1}, k_{\lambda_1\lambda_2}, \dots, k_{\lambda_{s-2}\lambda_{s-1}}, k_{\lambda_{s-1}\lambda}, \quad (1.9)$$

необходимый для последующего преобразования плана  $X$ .

Новый план  $X'$  образуется из  $X$  путем увеличения составляющих  $x(k_{ij})$  вдоль замкнутого маршрута  $\gamma$ , образованного маршрутом (1.9) и коммуникацией  $k_{\lambda\mu}$ , что отражено в соотношении

$$x'(k_{ij}) = \begin{cases} x(k_{ij}) + \theta & \text{при } k_{ij} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) - \theta & \text{при } k_{ji} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.10)$$

Параметр  $\theta$  выбирается как можно бóльшим, но таким, чтобы величины  $x'(k_{ij})$  и  $x(k_{ij})$  при  $k_{ij} \in \gamma$  остались на одном и том же отрезке линейности функции  $\varphi_{ij}(x_{ij})$ , участвующей в выражении (1.4).

Таким образом,

$$\theta = \min_{k_{ij} \in \gamma} \delta(k_{ij}), \quad (1.11)$$

где

$$\delta(k_{ij}) = \begin{cases} d_{ij} - x(k_{ij}) & \text{при } x(k_{ij}) > 0, \quad k_{ij} \in l, \\ -x(k_{ij}) & \text{при } x(k_{ij}) < 0, \quad k_{ij} \in l, \\ d_{\lambda\mu} & \text{при } k_{ij} = k_{\lambda\mu}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Функция  $x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , определяемая соотношениями (1.10)–(1.12), действительно является планом задачи (1.1)–(1.4). В самом деле, изменение составляющих плана  $X$  вдоль некоторого направленного замкнутого маршрута на одну и ту же величину не может нарушить равенств (1.1).

Правила (1.11), (1.12) не позволяют нарушить условия (1.2). Что касается требований (1.3), то их соблюдение гарантируется формулой (1.10).

Переход к новому плану  $X'$  приводит к изменению функции  $\Phi$  суммарных транспортных издержек на величину

$$\begin{aligned}\Phi(X') - \Phi(X) &= \sum_{k_{ij} \in \gamma} [\varphi_{ij}(x'(k_{ij})) - \varphi_{ij}(x(k_{ij}))] = \\ &= \sum_{\substack{x(k_{ij}) > 0 \\ k_{ij} \in l}} c_{ij}(x'(k_{ij}) - x(k_{ij})) - \\ &- \sum_{\substack{x(k_{ij}) < 0 \\ k_{ij} \in l}} -c_{ji}(x'(k_{ij}) - x(k_{ij})) + c_{\lambda\mu}(x'(k_{\lambda\mu}) - x(k_{\lambda\mu})) = \\ &= \theta \left[ \sum_{\substack{x(k_{ij}) > 0 \\ k_{ij} \in l}} c_{ij} - \sum_{\substack{x(k_{ij}) < 0 \\ k_{ij} \in l}} c_{ji} + c_{\lambda\mu} \right].\end{aligned}$$

Учитывая далее равенства (1.7) для  $k_{ij} \in l$ , получаем

$$\begin{aligned}\Phi(X') - \Phi(X) &= \theta \left[ \sum_{k_{ij} \in l} (u_j - u_i) + c_{\lambda\mu} \right] = \\ &= \theta (u_{\lambda_1} - u_{\mu} + u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1} + \dots + u_{\lambda_{s-1}} - u_{\lambda_{s-2}} + u_{\lambda} - u_{\lambda_{s-1}} + c_{\lambda\mu}) = \\ &= \theta [c_{\lambda\mu} - (u_{\mu} - u_{\lambda})].\end{aligned}$$

По предположению  $c_{\lambda\mu} < u_{\mu} - u_{\lambda}$ . Параметр  $\theta > 0$ , как минимум положительных чисел. Следовательно,

$$\Phi(X') - \Phi(X) = \theta [c_{\lambda\mu} - (u_{\mu} - u_{\lambda})] < 0. \quad (1.13)$$

Нетрудно проверить, что  $X'$  — опорный план. Система  $K_{X'}$  основных коммуникаций плана  $X'$  может либо не содержать  $k_{\lambda\mu}$ , либо содержать эту коммуникацию. В первом случае  $X'$ , естественно, является опорным планом, так как  $K_{X'} \subset K_X$ . Пусть  $k_{\lambda\mu} \in K_{X'}$ .

Если бы из коммуникаций сети  $(P, K_{X'})$  можно было составить замкнутый маршрут  $\gamma'$ , то, очевидно,  $k_{\lambda\mu} \in \gamma'$ . Рассмотрим маршрут  $l'$  из  $p_{\mu}$  в  $p_{\lambda}$ , который образуется из  $\gamma'$  путем исключения  $k_{\lambda\mu}$ . Маршрут  $l'$  составлен из коммуникаций множества  $K_X$ . Следовательно,  $l' = l$ , где  $l$  — маршрут из  $p_{\mu}$  в  $p_{\lambda}$ , построенный в процессе перехода к плану  $X'$ . Итак,  $\gamma' = \gamma$ , и все коммуникации  $\gamma$

принадлежат  $K_{X'}$ . Но в соответствии с определением числа  $\theta$  одна из коммуникаций  $\gamma$  заведомо не принадлежит  $K_{X'}$ . Мы пришли к противоречию. Таким образом, невозможно составить замкнутый маршрут из коммуникаций  $K_{X'}$ , т. е. план  $X'$  опорный.

Учитывая предположение о невырожденности задачи  $T(q, d, c)$ , заключаем, что множества  $K_X$  и  $K_{X'}$  состоят из равного числа пар противоположных коммуникаций. Поэтому минимум (1.11) достигается на единственной коммуникации; соответствующая пара коммуникаций не войдет в  $K_{X'}$ . Итак,  $K_{X'}$  либо совпадает с  $K_X$ , либо образуется из  $K_X$  заменой одной из пар противоположных коммуникаций на  $k_{\lambda\mu}$  и  $k_{\mu\lambda}$ .

б) Другая возможность заключается в нарушении второго условия системы (1.8)

$$u(p_\mu) - u(p_\lambda) < c_{\lambda\mu}, \quad x(k_{\lambda\mu}) = d_{\lambda\mu}.$$

В этом случае план  $X'$  образуется из плана  $X$  увеличением на  $\theta > 0$  перевозок вдоль коммуникаций замкнутого маршрута  $\gamma_1$ , состоящего из  $k_{\mu\lambda}$  и маршрута  $l_1$  из  $p_\lambda$  в  $p_\mu$ . Маршрут  $l_1$  из  $p_\lambda$  в  $p_\mu$ , составленный из коммуникаций  $K_X$ , определяется по тем же правилам, что и в случае а). Замкнутый маршрут  $\gamma_1$  отличается от  $\gamma$  только направлением.

Новый план  $X$  вычисляется по формулам (1.10), (1.11) и (1.12), в которых замкнутый маршрут  $\gamma$  заменен на  $\gamma_1$ . В соответствии с доказанным для случая а)  $X'$  является опорным планом задачи, причем

$$\Phi(X') - \Phi(X) = \theta[(u_\mu - u_\lambda) - c_{\lambda\mu}] \leq 0.$$

Множества  $K_X$  и  $K_{X'}$  основных коммуникаций либо совпадают, либо различаются одной парой противоположных коммуникаций.

Остальные две возможности нарушения требований (1.8) при  $i = \lambda$  и  $j = \mu$  сводятся к случаям а) и б) для коммуникации  $k_{\mu\lambda}$ .

в) В самом деле, пусть несоблюдается левая часть первого условия системы (1.8):

$$-c_{\mu\lambda} > u(p_\mu) - u(p_\lambda), \quad x(k_{\lambda\mu}) = 0.$$

Очевидные преобразования позволяют записать эти соотношения в виде

$$u(p_\lambda) - u(p_\mu) > c_{\mu\lambda}, \quad x(k_{\mu\lambda}) = 0,$$

т. е. имеет место случай а) для коммуникации  $k_{\mu\lambda}$ .

г) Если, наконец, нарушено четвертое условие системы (1.8), т. е.

$$u(p_\mu) - u(p_\lambda) > -c_{\mu\lambda}, \quad x(k_{\lambda\mu}) = -d_{\mu\lambda},$$

то, обращаясь к коммуникации  $k_{\mu\lambda}$ , приходим к случаю б):

$$u(p_\lambda) - u(p_\mu) < c_{\mu\lambda}, \quad x(k_{\mu\lambda}) = d_{\mu\lambda}.$$

Итак, на втором этапе итерации строится замкнутый маршрут  $\gamma$ , проходящий через пункты  $p_\mu$  и  $p_\lambda$  и состоящий из коммуникаций множества  $\{K_x, k_{\lambda\mu}, k_{\mu\lambda}\}$ , причем в случаях а) и г) маршрут  $\gamma$  включает  $k_{\lambda\mu}$ , а в случаях б) и в) — содержит  $k_{\mu\lambda}$ .

Переход от опорного плана  $X$  к опорному плану  $X'$  производится за счет увеличения перевозок  $x(k_{ij})$  при  $k_{ij} \in \gamma$  на величину  $\theta$ , которая вычисляется по формулам (1.11) и (1.12). Произведение параметра  $\theta$  и значения невязки соответствующего условия системы (1.8) при  $i=\lambda, j=\mu$  равно разности  $\Phi(X') - \Phi(X)$ .

1.3. Каждая итерация, содержащая этап 2, приводит к убыванию функции  $\Phi$ . Следовательно, в процессе решения задачи мы движемся по различным ее опорным планам. Число опорных планов задачи  $T(q, d, c)$  конечно.

Таким образом, метод потенциалов позволяет, имея исходный опорный план невырожденной задачи  $T(q, d, c)$ , получить ее решение за конечное число итераций.

Остановимся на одном из возможных способов получения исходного опорного плана задачи. Приведем задачу  $T(q, d, c)$  к эквивалентной задаче с одним пунктом производства  $p_0$  и одним пунктом потребления  $p_{N+1}$ , руководствуясь правилом, изложенным в § 1 гл. 11. Далее найдем максимальный поток  $\bar{X}$  на сети  $(\bar{P}, \bar{K})$  с источником  $p_0$  и стоком  $p_{N+1}$ . Возможны два случая:

а) величина  $\bar{x}_1$  потока  $\bar{X}$  равна

$$q = \sum_{q(p_i) > 0} q(p_i);$$

б) величина  $\bar{x}_1$  потока  $\bar{X}$  меньше  $q$ .

В первом случае компоненты потока  $\bar{X}$ , отвечающие коммуникациям  $k_{ij} \in K'$ , составляют план  $X$  задачи  $T(q, d, c)$ . Случай б) указывает на неразрешимость задачи вследствие несовместности ее условий.

План  $X$ , к которому приходят в случае а), может оказаться неопорным. Если это так, то осуществляется переход от плана  $X$  к опорному плану  $X_1$  путем последовательного разрушения замкнутых маршрутов в системе основных коммуникаций. Процесс построения опорного плана  $X_1$  основывается на рассуждениях, приведенных при доказательстве теоремы 3.1 гл. 11.

Строгое распространение метода потенциалов на случай вырожденных задач требует введения семейства  $\varepsilon$ -задач, как это обычно делается при анализе транспортных задач в матричной постановке. В результате может быть получено правило выбора пары противоположных коммуникаций, подлежащих исключению из числа основных, которое дает полную гарантию от возможности заикливания. Мы не будем приводить этого правила, а укажем более простую рекомендацию, которая хотя и не обеспечивает полной уверенности в отсутствии цикла, однако практически исключает такую возможность.

В вырожденном случае роль системы основных коммуникаций опорного плана  $X$  переходит к системе базисных коммуникаций этого плана, которая состоит из  $N-1$  пар противоположных коммуникаций, содержит все основные коммуникации плана  $X$  и не допускает ни одного замкнутого маршрута. В невырожденном случае система основных коммуникаций совпадает с системой базисных коммуникаций. Вырожденный опорный план обычно обладает несколькими системами базисных коммуникаций, ни одна из которых не совпадает с множеством основных коммуникаций плана. Сохраним для системы базисных коммуникаций плана  $X$  обозначение  $K_X$ .

Множество  $K_{X'}$  базисных коммуникаций плана  $X'$  образуется из множества  $\{K_X, k_{\lambda\mu}, k_{\mu\lambda}\}$  путем исключения двух противоположных коммуникаций  $k_{\alpha\beta}$  и  $k_{\beta\alpha}$ , на одной из которых достигается минимум (1.11).

В качестве  $\alpha$  и  $\beta$  выбирается любая пара индексов  $i$  и  $j$ , для которых

$$\delta(k_{ij}) = \theta.$$

Естественно, что в вырожденном случае один и тот же опорный план может сохраниться в течение ряда итераций ( $\theta=0$ ); в результате отдельной итерации изменяется лишь система базисных коммуникаций этого плана.

## § 2. Пример

Приведем численный пример.

Требуется решить транспортную задачу на сети, условия которой изображены на рис. 12.1.

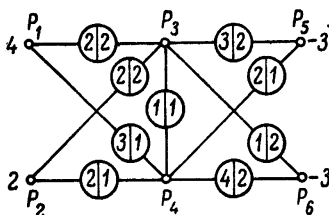


Рис. 12.1.

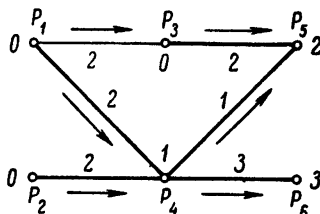


Рис. 12.2.

Коммуникации сети не отмечены стрелками, так как противоположные коммуникации  $k_{ij}$  и  $k_{ji}$  одновременно либо входят, либо не входят в множество  $K$ , т. е.  $K=K'$ . Каждая коммуникация снабжена кружком, в левой части которого помещена ее пропускная способность, а в правой — ее транспортные расходы, причем  $d_{ij}=d_{ji}$ ,  $c_{ij}=c_{ji}$ . Задача имеет два пункта производства ( $p_1$  и  $p_2$ ), два пункта потребления ( $p_5$  и  $p_6$ ) и два перевалочных пункта ( $p_3$  и  $p_4$ ). Ненулевые значения функции  $q(p_i)$  помещены около соответствующих пунктов.

В качестве исходного примем опорный план  $X$ , изображенный на рис. 12.2. На этом рисунке показаны

только такие коммуникации сети, вдоль которых запланированы ненулевые перевозки. Величины перевозок помещены около соответствующих коммуникаций; направление перевозок отмечено стрелками. Коммуникации, составляющие систему  $K_X$ , выделены жирными линиями.

**Итерация I.** Начнем с этапа 1, на котором план  $X$  исследуется на оптимальность.

Составим последовательность множеств  $P_i$ , отправляясь от пункта  $p_1$ :

$$P_1 = \{p_4\}, \quad P_2 = \{p_2, p_5, p_6\}, \quad P_3 = \{p_3\}.$$

Определим значения предварительных потенциалов:

$$\begin{aligned} u(p_1) &= 0, \quad u(p_4) = u(p_1) + c_{41} = 1, \quad u(p_2) = u(p_4) - c_{42} = 0, \\ u(p_5) &= u(p_4) + c_{45} = 2, \quad u(p_6) = u(p_4) + c_{46} = 3, \\ u(p_3) &= u(p_5) - c_{35} = 0. \end{aligned}$$

Составим разности предварительных потенциалов для коммуникаций, не вошедших в систему  $K_X$ , и проверим для них выполнимость условий (1.8). Имеем

$$\begin{aligned} u(p_3) - u(p_1) &= 0 < c_{13} = 2, & x(k_{13}) &= 2, \\ -1 &= -c_{43} < u(p_4) - u(p_3) = 1 = c_{34}, & x(k_{34}) &= 0, \\ -c_{32} &< u(p_3) - u(p_2) = 0 < c_{23}, & x(k_{23}) &= 0, \\ u(p_6) - u(p_3) &= 3 > c_{36} = 2, & x(k_{36}) &= 0. \end{aligned}$$

Условия (1.8) нарушены для коммуникаций  $k_{13}$  и  $k_{36}$ . Следовательно, необходим второй этап итерации. Выбираем коммуникацию  $k_{13}$  (ей соответствует большее значение невязки для нарушенного условия (1.8)) и начинаем этап 2. Имеет место случай б), когда замкнутый маршрут  $\gamma$ , содержащий пункты  $p_1$  и  $p_3$ , включает коммуникацию  $k_{31}$ .

Система множеств  $P_i$ , начиная с пункта  $p_1$ , уже построена, причем в данном случае  $s=3$ .

Маршрут  $l$  из  $p_1$  в  $p_3$  включает

$$k_{14}, k_{45}, k_{53}.$$

Согласно формулам (1.11) и (1.12) находим

$$\begin{aligned}\delta_{14} &= d_{14} - x(k_{14}) = 1, & \delta_{45} &= d_{45} - x(k_{45}) = 1, \\ \delta_{53} &= -x(k_{53}) = x(k_{35}) = 2, & \delta_{31} &= x(k_{13}) = 2, \\ \theta &= \min \{\delta_{14}, \delta_{45}, \delta_{53}, \delta_{31}\} = 1 = \delta_{14} = \delta_{45}.\end{aligned}$$

Новый план  $X'$  образуется из  $X$  путем увеличения перевозок вдоль коммуникаций замкнутого маршрута  $\gamma$

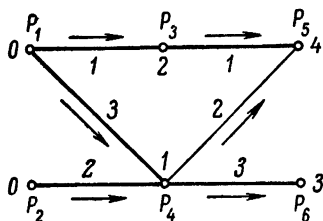


Рис. 12.3.

на 1. Исключить из числа базисных можно либо коммуникации  $k_{14}$  и  $k_{41}$ , либо коммуникации  $k_{45}$  и  $k_{54}$ . Оставим в системе  $K_{X'}$  коммуникации, связывающие пункты  $p_1$  и  $p_4$ . Множество  $K_{X'}$  состоит из коммуникаций, отмеченных жирными линиями на рис. 12.3, соответствующем плану  $X'$ .

Итерация II. Этап I. Определим значения предварительных потенциалов:

$$\begin{aligned}u'(p_1) &= 0, & u'(p_3) &= 2, & u'(p_4) &= 1, \\ u'(p_2) &= 0, & u'(p_5) &= 4, & u'(p_6) &= 3.\end{aligned}$$

Составим разности предварительных потенциалов для коммуникаций, не включенных в систему  $K_{X'}$ , и проверим для них условия (1.8):

$$\begin{aligned}-2 &= -c_{32} < u'(p_3) - u'(p_2) = 2 = c_{23}, & x'(k_{23}) &= 0, \\ -1 &= -c_{43} = u'(p_4) - u'(p_3) = -1 < c_{34} = 1, & x'(k_{34}) &= 0, \\ -2 &= -c_{63} < u'(p_6) - u'(p_3) = 1 < c_{36} = 2, & x'(k_{36}) &= 0, \\ & & u'(p_5) - u'(p_4) &= 3 > c_{45} = 1, & x'(k_{45}) &= d_{45} = 2.\end{aligned}$$

Следовательно, план  $X'$  — решение задачи.

### § 3. Метод замкнутых маршрутов

3.1. Приведем описание еще одного метода решения задачи  $T(q, d, c)$ , который примыкает к методу потенциалов, но в отличие от последнего уменьшает величину

суммарных транспортных затрат на каждой итерации вне зависимости от свойств исследуемой задачи. Вычислительную процедуру, сущность которой излагается ниже, естественно назвать *методом замкнутых маршрутов*.

Пусть  $X = x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , — произвольный план задачи  $T(q, d, c)$  (не обязательно опорный). Свяжем с ним множество  $R_x$ , состоящее из коммуникаций  $k_{ij} \in K'$ , для которых

$$x(k_{ij}) < d_{ij}. \quad (3.1)$$

Определим на коммуникациях сети  $(P, R_x)$  функцию  $C_x$ , положив

$$c_x(k_{ij}) = \begin{cases} c(k_{ij}), & \text{если } x(k_{ij}) \geq 0, \\ -c(k_{ij}), & \text{если } x(k_{ij}) < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Условимся говорить, что направленный замкнутый маршрут  $\gamma$  сети  $(P, R_x)$  является отрицательным, нулевым или положительным, если величина  $c_x(\gamma)$  его транспортных расходов в смысле функции  $C_x$  соответственно отрицательна, равна нулю или положительна. Метод состоит в последовательном улучшении планов перевозок.

На каждой итерации метода замкнутых маршрутов по имеющемуся плану  $X$  строится транспортная сеть  $(P, R_x)$ , на коммуникациях которой определяется функция  $C_x$ .

В процессе итерации разыскивается отрицательный замкнутый маршрут сети  $(P, R_x)$ , который используется далее для улучшения плана  $X$ . Отсутствие отрицательных замкнутых маршрутов, составленных из коммуникаций сети  $(P, R_x)$ , указывает на оптимальность плана  $X$ .

**3.2.** Перейдем к более подробному изложению сущности метода.

В основе метода замкнутых маршрутов лежит следующий признак оптимальности.

*Если транспортная сеть  $(P, R_x)$  не содержит отрицательных замкнутых маршрутов, то план  $X$  — решение задачи  $T(q, d, c)$ .*

Сформулируем вспомогательное утверждение, необходимое для обоснования признака оптимальности.

*Л е м м а.* Для произвольной неотрицательной функции  $z(k_{ij})$ , определенной на коммуникациях сети  $(S, R)$ , отличной от тождественного нуля и удовлетворяющей условиям

$$z(p_i, S) = z(S, p_i), \quad p_i \in S,$$

справедливо представление

$$z(k_{ij}) = \sum_{\lambda=1}^t z_{\lambda}(k_{ij}), \quad (3.3)$$

где

$$z_{\lambda}(k_{ij}) = \begin{cases} \theta_{\lambda} > 0 & \text{при } k_{ij} \in \gamma_{\lambda}, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$\gamma_{\lambda}$  — направленные замкнутые маршруты сети  $(S, R)$ .

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Опираясь на лемму, нетрудно убедиться в справедливости признака оптимальности. Действительно, пусть сеть  $(P, R_X)$  не имеет отрицательных маршрутов, а  $X' \neq X$  — произвольный план задачи  $T(q, d, c)$ . Объединим в множество  $R$  коммуникации  $k_{ij} \in K'$ , для которых

$$x(k_{ij}) < x'(k_{ij}),$$

и положим

$$z(k_{ij}) = [x'(k_{ij}) - x(k_{ij})], \quad k_{ij} \in R, \quad S = P.$$

Очевидно, функция  $z(k_{ij})$  удовлетворяет условиям леммы, причем  $R \subset R_X$ .

В силу выпуклости функций  $\phi_{ij}(x_{ij})$ , составляющих функцию транспортных расходов  $\Phi$ ,

$$\Phi(X') - \Phi(X) \geq \sum_{k_{ij} \in R} c_X(k_{ij}) z(k_{ij}). \quad (3.4)$$

Подставляя далее в правую часть (3.4) вместо функции  $z(k_{ij})$  ее представление (3.3), получаем

$$\Phi(X') - \Phi(X) \geq \sum_{\lambda=1}^t c_{\lambda} \theta_{\lambda},$$

где  $c_{\lambda}$  — величина транспортных расходов замкнутого маршрута  $\gamma_{\lambda}$  (в смысле функции  $C_X$ ).

По условию  $c_\lambda \geq 0$  для всех  $\lambda$  ( $\gamma_\lambda$  состоит из коммуникаций множества  $R_X$ ). Следовательно,

$$\Phi(X') - \Phi(X) \geq 0,$$

т. е.  $X$  — оптимальный план задачи  $T(q, d, c)$ .

3.3. Для выявления отрицательных замкнутых маршрутов сети  $(P, R_X)$  целесообразно использовать некоторый аналог метода Беллмана — Шимбела (§ 3 гл. 9).

Задавшись достаточно малым  $\varepsilon > 0$ , введем в рассмотрение функцию  $C_X(\varepsilon)$ , значения которой определяются условием

$$c_X(k_{ij}, \varepsilon) = c_X(k_{ij}) + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Введем далее матрицу  $C_m(\varepsilon) = \|c_{ij}^{(m)}(\varepsilon)\|_N$ , заполненную величинами транспортных расходов  $m$ -оптимальных обобщенных маршрутов сети  $(P, R_X)$ , на коммуникациях которой задана функция  $C_X(\varepsilon)$  (ради упрощения обозначений зависимость  $C_m(\varepsilon)$  от  $X$  не отмечена).

Поскольку речь идет об *обобщенных* маршрутах, т. е. о таких последовательностях коммуникаций, геометрическим образом которых является направленная ломаная линия, допускающая, вообще говоря, самопересечения, то (см. п. 3.4 гл. 9), несмотря на отрицательность некоторых значений функции  $C_X(\varepsilon)$ , при любых  $m$  и  $n$  имеет место формула

$$c_{ij}^{(m+n)}(\varepsilon) = \min_{1 \leq \mu \leq N} [c_{i\mu}^{(m)}(\varepsilon) + c_{\mu j}^{(n)}(\varepsilon)], \quad (3.6)$$

причем  $c_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = c_X(k_{ij}) + \varepsilon$ .

Нетрудно заметить, что

$$c_{ij}^{(m)}(\varepsilon) = c_{ij}^{(m)} + \varepsilon \cdot \alpha_{ij}^{(m)},$$

где  $c_{ij}^{(m)}$  — величина транспортных расходов  $m$ -оптимального обобщенного маршрута из  $p_i$  в  $p_j$  в смысле функции  $C_X$ ;  $\alpha_{ij}^{(m)}$  — минимально возможное число коммуникаций, из которых может быть составлен такой маршрут.

Используя соотношение (3.6), построим одну за другой матрицы

$$C_1(\varepsilon), \quad C_2(\varepsilon), \quad C_4(\varepsilon), \quad \dots, \quad C_{2^k}(\varepsilon), \quad \dots \quad (3.7)$$

Перед тем, как приступить к формированию очередной матрицы  $C_{2^{k+1}}(\varepsilon)$ , следует проверить два условия:

$$c_{ij}^{(2^k)}(\varepsilon) + c_{ji}^{(2^k)}(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{для всех } i > j, \quad (3.8)$$

$$k \leq \log_2 \left( \frac{N+1}{2} \right), \quad \text{где } N - \text{число пунктов сети.} \quad (3.9)$$

Переход к матрице  $C_{2^{k+1}}(\varepsilon)$  осуществляется лишь при соблюдении обоих условий.

**3.4.** Будем говорить, что процесс продолжения последовательности (3.7) завершился случаем 1, если условие (3.8) оказалось нарушенным; и случаем 2, если (3.8) выполнено, однако (3.9) не имеет места.

Разберем каждый случай в отдельности.

Случай 1 влечет за собой существование такой пары индексов  $\lambda, \mu$ , что

$$c_{\lambda\mu}^{(2^k)}(\varepsilon) + c_{\mu\lambda}^{(2^k)}(\varepsilon) < 0. \quad (3.10)$$

Неравенство (3.10) указывает на наличие отрицательного замкнутого маршрута  $\gamma$  в сети  $(P, R_X)$ , для выявления которого достаточно иметь матрицы  $C_1(\varepsilon)$  и  $C_{2^k}(\varepsilon)$ . Остановимся на способе построения  $\gamma$ . Исходя из пункта  $p_\lambda$ , образуем последовательность пунктов сети

$$p_\lambda, p_{\lambda_1}, p_{\lambda_2}, \dots, p_{\lambda_r}, \dots, \quad (3.11)$$

руководствуясь правилом: в качестве  $\lambda_{r+1}$  принимается значение индекса  $i$ , на котором достигается

$$\min_{1 \leq i \leq N} \left[ c_{\lambda_r i}^{(1)}(\varepsilon) + c_{i\mu}^{(2^k)}(\varepsilon) \right]. \quad (3.12)$$

Учитывая (3.12) и равенство (3.6) при  $m=1$  и  $n=2^k$ , получаем, что при любых  $r$  и  $s$  ( $s > r$ )

$$\begin{aligned} c_X(k_{\lambda_r \lambda_{r+1}}) + c_X(k_{\lambda_{r+1} \lambda_{r+2}}) + \dots + c_X(k_{\lambda_{s-1} \lambda_s}) + \\ + \varepsilon(s-r) + c_{\lambda_s \mu}^{(2^k)}(\varepsilon) \leq c_{\lambda_r \mu}^{(2^k)}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Последовательность (3.11) обрывается на некотором пункте  $p_{\lambda_s}$ , если этот пункт уже встречался в ней ранее ( $\lambda_s = \lambda_r$  при  $r < s$ ), либо если  $p_{\lambda_s} = p_\mu$ .

При первой возможности в качестве замкнутого маршрута  $\gamma$  принимается последовательность коммуникаций

$$k_{\lambda_r \lambda_{r+1}}, k_{\lambda_{r+1} \lambda_{r+2}}, \dots, k_{\lambda_{s-1} \lambda_r}.$$

Отрицательность маршрута  $\gamma$  вытекает из неравенства (3.13) при  $\lambda_r = \lambda_s$ .

Вторая возможность приводит к маршруту  $l_{\lambda\mu}$  из  $p_\lambda$  в  $p_\mu$ , причем в соответствии с (3.13)

$$c_X(l_{\lambda\mu}) = c_X(k_{\lambda\lambda_1}) + \dots + c_X(k_{\lambda_{s-1}\mu}) \leq c_{\lambda\mu}^{(2^k)}. \quad (3.14)$$

Если имеет место вторая возможность, то следует приступить к построению маршрута  $l_{\mu\lambda}$  из  $p_\mu$  в  $p_\lambda$ , руководствуясь уже описанными правилами. В результате либо будет выделен отрицательный замкнутый маршрут  $\gamma$ , либо сформирован такой маршрут  $l_{\mu\lambda}$ , что

$$c_X(l_{\mu\lambda}) \leq c_{\mu\lambda}^{(2^k)}. \quad (3.15)$$

В последнем случае в качестве  $\gamma$  берется замкнутый маршрут, составленный из  $l_{\lambda\mu}$  и  $l_{\mu\lambda}$ , отрицательность которого вытекает из (3.10), (3.14) и (3.15).

Случай 2 указывает на отсутствие отрицательных замкнутых маршрутов в сети  $(P, R_X)$ . Действительно, допустим, что это не так, т. е. существует отрицательный замкнутый маршрут  $\gamma_1$ , составленный из коммуникаций множества  $R_X$ . Маршрут  $\gamma_1$  содержит не более  $N$  коммуникаций.

Следовательно, его можно разбить на два маршрута  $l_{ij}$  и  $l_{ji}$ , каждый из которых включает не более чем  $\frac{N+1}{2}$  коммуникаций. Поскольку  $2^k > \frac{N+1}{2}$ , то

$$c_X(l_{ij}) \geq c_{ij}^{(2^k)}, \quad c_X(l_{ji}) \geq c_{ji}^{(2^k)},$$

или

$$c_{ij}^{(2^k)} + c_{ji}^{(2^k)} \leq c_x(l_{ij}) + c_x(l_{ji}) = c_x(\gamma) < 0.$$

Полученное неравенство противоречит условиям случая 2 (нарушены требования (3.8)). Таким образом, допущение о существовании отрицательного маршрута  $\gamma$  ошибочно, что и требовалось доказать.

3.5. Допустим, что процесс формирования матрицы последовательности (3.7) завершился исходом 1. Тогда, как было показано, можно выделить отрицательный замкнутый маршрут  $\gamma$ , состоящий из коммуникаций  $R_x$ .

Определим систему перевозок  $X' = x'(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , согласно формуле

$$x'(k_{ij}) = \begin{cases} x(k_{ij}) + \theta & \text{при } k_{ij} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) - \theta & \text{при } k_{ji} \in \gamma, \\ x(k_{ij}) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Здесь

$$\theta = \min_{k_{ij} \in \gamma} \delta(k_{ij}), \quad (3.17)$$

$$\delta(k_{ij}) = \begin{cases} d(k_{ij}) - x(k_{ij}), & \text{если } x(k_{ij}) \geq 0, \\ -x(k_{ij}), & \text{если } x(k_{ij}) < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Очевидно,  $X'$  является планом задачи  $T(q, d, c)$ , причем в соответствии с (3.17) и (3.18) величины  $x(k_{ij})$  и  $x'(k_{ij})$  расположены на одном и том же отрезке линейности функции  $\varphi_{ij}(x_{ij})$ .

Следовательно,

$$\Phi(X') - \Phi(X) = c_x(\gamma) \cdot \theta. \quad (3.19)$$

По условию  $c_x(\gamma) < 0$ . Маршрут  $\gamma$  состоит из коммуникаций множества  $R_x$ , т. е.

$$d(k_{ij}) - x(k_{ij}) > 0 \text{ или } k_{ij} \in \gamma,$$

и параметр  $\theta$ , являющийся минимумом положительных чисел  $\delta(k_{ij})$ , положителен.

Обращаясь к равенству (3.19), получаем

$$\Phi(X') - \Phi(X) < 0,$$

т. е. план  $X'$  экономнее плана  $X$ .

Пусть теперь процесс формирования матриц последовательности (3.7) привел к случаю 2. Поскольку, как было показано, сеть  $(P, R_x)$  лишена в этом случае отрицательных замкнутых маршрутов, то в соответствии с признаком оптимальности план  $X$  является решением задачи  $T(q, d, c)$ .

Итак, на каждой итерации метода замкнутых маршрутов либо устанавливается оптимальность имеющегося плана, либо строится более экономный план. Исходный план задачи может быть найден с помощью метода построения максимального потока или любым другим способом.

В предположении целочисленности функций  $Q$ ,  $C$  и  $D$  величины  $\theta$  и  $c_x(\gamma)$  — целые числа, и из (3.19) вытекает, что

$$\Phi(X') - \Phi(X) \leq -1.$$

Полученное неравенство указывает на конечность метода. Этот вывод останется в силе и при рациональных значениях функций, определяющих задачу.

#### § 4. Венгерский метод для задачи типа $T(q, d, c)$

4.1. Этот параграф содержит описание метода решения задачи  $T(q, d, c)$ , являющегося распространением венгерского метода для задач  $T$  и  $T_d$  (см. гл. 5). Метод состоит в постепенном приближении к искомому решению с помощью оптимальных планов задач  $T(q_t, d, c)$ , функции  $q_t$  производства и потребления которых удовлетворяют условию

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq q_t(p_i) \leq q(p_i) & \quad \text{при} \quad p_i \in P_+, \\ q(p_i) \leq q_t(p_i) \leq 0 & \quad \text{при} \quad p_i \in P_-, \\ q_t(p_i) = q(p_i) & \quad \text{при} \quad p_i \in P_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

В процессе решения задачи происходит постепенное сокращение невязки

$$\varepsilon_t = \sum_{p_i \in P_+} [q(p_i) - q_t(p_i)] = \sum_{p_i \in P_-} [q_t(p_i) - q(p_i)]. \quad (4.2)$$

(Равенство в соотношении (4.2) — следствие последнего условия системы (4.1).)

Через несколько итераций либо получают  $\varepsilon_t = 0$ , либо убеждаются в невозможности дальнейшего сокращения невязки  $\varepsilon_t > 0$ . В первом случае оптимальный план задачи  $T(q_t, d, c)$  — решение задачи  $T(q, d, c)$ ; во втором — исследуемая задача неразрешима из-за несовместности ее системы условий. Венгерский метод базируется на алгоритме построения максимального потока (гл. 10), с помощью которого осуществляется основная часть каждой итерации. При изложении метода предполагается, что задача  $T(q, d, c)$  записана в форме (1.1) — (1.4).

**4.2.** Приведем описание отдельной итерации венгерского метода.

Перед началом итерации имеются следующие данные. Оптимальный план  $X_t = x_t(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , задачи  $T(q_t, d, c)$ , где функция  $q_t(p_i)$  удовлетворяет условию (4.1). Функция потенциалов  $U_t = u_t(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , задачи  $T(q_t, d, c)$ . Эти данные образуются на предыдущей итерации, либо определяются на предварительном этапе, если речь идет о первой итерации.

Оптимальный план  $X_t$  задачи  $T(q_t, d, c)$  и функция ее потенциалов  $u_t(p_i)$  связаны условиями оптимальности:

$$u_t(p_j) - u_t(p_i) = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } 0 < x_t(k_{ij}) < d_{ij}, \\ -c_{ji}, & \text{если } -d_{ji} < x_t(k_{ij}) < 0; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$-c_{ji} \leq u_t(p_j) - u_t(p_i) \leq c_{ij} \quad \text{при } x_t(k_{ij}) = 0; \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_t(p_j) - u_t(p_i) &\geq c_{ij} && \text{при } x_t(k_{ij}) = d_{ij}, \\ u_t(p_j) - u_t(p_i) &\leq -c_{ji} && \text{при } x_t(k_{ij}) = -d_{ji}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Здесь  $k_{ij}$  — произвольная коммуникация множества  $K'$ .

Однако, как уже отмечалось, система условий (4.3) — (4.5) для всех  $k_{ij} \in K'$  эквивалентна суженной системе, когда из каждой пары противоположных коммуникаций, входящих в  $K'$ , выбирается только одна.

Объединим в множество  $K_t$  коммуникации  $k_{ij} \in K$ , для которых

$$u_t(p_j) - u_t(p_i) = c_{ij}. \quad (4.6)$$

Под  $K'_t$ , как обычно, понимается расширение множества  $K_t$ , включающее пару противоположных коммуникаций, если хотя бы одна из составляющих пары при-

надлежит  $K_t$ . Пусть  $d_t(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'_t$ , — результат распространения функции  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K_t$  на множество  $K'_t$ , т. е.

$$d_t(k_{ij}) = \begin{cases} d(k_{ij}), & \text{если } k_{ij} \in K_t, \\ 0, & \text{если } k_{ij} \notin K_t, \quad k_{ji} \in K_t. \end{cases} \quad (4.7)$$

Исходные данные итерации (план  $X_t$  и функция потенциалов  $U_t$ ) порождают вспомогательную задачу  $A_t$ , которая состоит в определении системы перевозок  $x(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , подчиняющейся ограничениям:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq x(p_i, P) \leq q(p_i), & \text{если } p_i \in P_+, \\ 0 &\geq x(p_i, P) \geq q(p_i), & \text{если } p_i \in P_-, \\ x(p_i, P) &= q(p_i) = 0, & \text{если } p_i \in P_0; \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$-x(k_{ji}) = x(k_{ij}) \leq d_t(k_{ij}), \quad k_{ij} \in K'_t, \quad (4.9)$$

$$-x(k_{ji}) = x(k_{ij}) = x_t(k_{ij}), \quad k_{ij} \notin K'_t, \quad (4.10)$$

и доставляющей максимум функции

$$x(P_+, P) = \sum_{p_i' \in P_+} x(p_i, P). \quad (4.11)$$

Вспомогательная задача  $A_t$  заключается, таким образом, в построении системы перевозок по коммуникациям  $K'_t$ , которая должна:

а) не превышать величин их пропускных способностей;

б) совместно с системой перевозок  $x_t(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \notin K'_t$ , осуществлять возможно больший вывоз из пунктов производства, учитывая возможности этих пунктов;

в) не превышать спрос в пунктах потребления и

г) балансировать ввоз и вывоз в перевалочных пунктах.

Задача  $A_t$  обычным приемом сводится к задаче  $\bar{A}_t$  об отыскании максимального потока, некоторые компоненты которого заранее фиксированы. Для этого множество  $P$  дополняется источником  $p_0$  и стоком  $p_{N+1}$ , пункты производства  $p_j$  соединяются с  $p_0$  коммуникациями  $k_{0j}$ , пункты потребления  $p_i$  связываются с  $p_{N+1}$  коммуникациями  $k_{i,N+1}$ .

Функция  $d_t(k_{ij})$  распространяется на вновь введенные коммуникации с помощью равенств

$$d_t(k_{0j}) = q(p_j), p_j \in P_+; d(k_{i, N+1}) = -q(p_i), p_i \in P_- \quad (4.12)$$

Задача  $\bar{A}_t$  состоит в отыскании максимального потока на сети  $(\bar{P}, \bar{K}')$  с источником  $p_0$  и стоком  $p_{N+1}$ , совместимого с функцией  $d_t(k_{ij})$  при  $k_{ij} \in \bar{K}'_t$  и совпадающего с потоком  $X_t$  на коммуникациях  $k_{ij} \notin \bar{K}'_t$ . Здесь  $\bar{P} = \{P, p_0, p_{N+1}\}$ ,  $\bar{K} = \{K, k_{0j}, k_{i, N+1}\}$ ,  $\bar{K}_t = \{K_t, k_{0j}, k_{i, N+1}\}$ .

В качестве исходного потока задачи  $\bar{A}_t$  принимается система перевозок  $\bar{X}_t$ , где

$$\bar{x}_t(k_{ij}) = \begin{cases} x_t(k_{ij}) & \text{при } k_{ij} \in K', \\ x_t(p_j, P) & \text{при } k_{ij} = k_{0j}, \\ -x_t(p_i, P) & \text{при } k_{ij} = k_{i, N+1}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Для решения задачи  $\bar{A}_t$ , исходный поток  $\bar{X}_t$  которой известен, можно применить алгоритм построения максимального потока, изложенный в гл. 10, введя в него предварительно следующее очевидное изменение. Система ненасыщенных коммуникаций на каждой итерации должна формироваться только из коммуникаций множества  $\bar{K}'_t$ . Таким образом, процесс построения искомого максимального потока осуществляется с помощью алгоритма гл. 10, действующего на сети  $(\bar{P}, \bar{K}'_t)$ . Поскольку каждая коммуникация  $k_{0j}$  имеет ограниченную пропускную способность, задача  $\bar{A}_t$  заведомо разрешима, и для ее анализа можно использовать только основную часть алгоритма гл. 10. Через несколько итераций алгоритма (число которых обычно невелико) получают максимальный поток  $\bar{X}_t^*$  задачи  $\bar{A}_t$ . Одновременно строятся множества  $\bar{P}'_t$  и  $\bar{P}''_t$ , обладающие следующими свойствами:

$$p_0 \in \bar{P}'_t, p_{N+1} \in \bar{P}''_t, \bar{P}'_t \cap \bar{P}''_t = \emptyset; \bar{P}'_t \cup \bar{P}''_t = P, \quad (4.14)$$

$$\bar{x}_t^*(k_{ij}) = d_t(k_{ij}), \text{ если } p_i \in \bar{P}'_t, p_j \in \bar{P}''_t, k_{ij} \in \bar{K}'_t. \quad (4.15)$$

Очевидно, система перевозок  $X_t^* = \bar{x}_t^*(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K'$ , представляет собой решение вспомогательной задачи  $A_t$ .

Положим

$$X_{t+1} = X_t^*, \quad q_{t+1}(p_i) = x^*(p_i, P), \quad p_i \in P.$$

В соответствии с условиями (4.8) задачи  $A_t$  функция  $q_{t+1}(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , удовлетворяет требованиям (4.1); кроме того,

$$\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1} = \sum_{p_i \in P_+} x_{t+1}(p_i, P) - \sum_{p_i \in P_+} x_t(p_i, P) \geq 0,$$

поскольку  $X_{t+1} = X_t^*$  — решение задачи  $A_t$ .

4.3. Если  $\varepsilon_{t+1} = 0$ , то  $X_{t+1}$  — план задачи (1.1) — (1.4). Это вытекает из соотношений (4.1) и (4.2), в которых  $t$  заменено на  $t+1$ . План  $X_{t+1}$  и функция потенциалов  $U_t$  связаны условиями (4.3) — (4.5). Действительно,  $X_{t+1}$  отличается от  $X_t$  только на коммуникациях множества  $K'_t$ . Поэтому достаточно проверить условия (4.3) — (4.5) при  $k_{ij} \in K_t$ . Нарушение условий (4.3) — (4.5) при некотором  $k_{ij} \in K_t$  возможно лишь в случае, если

$$x_{t+1}(k_{ij}) < 0. \quad (4.16)$$

Но тогда  $d_t(k_{ji}) > 0$ , т. е.  $k_{ji} \in K_t$ , и, следовательно,

$$u_t(p_j) - u_t(p_i) = -c_{ji}. \quad (4.17)$$

Соотношения (4.16) — (4.17) показывают, что и в рассматриваемом случае переход от  $X_t$  к  $X_{t+1}$  не нарушает условий (4.3) — (4.5).

Итак, план  $X_{t+1}$  удовлетворяет условиям критерия оптимальности и является решением задачи  $T(q, d, c)$ . Назовем рассмотренную возможность случаем 1.

Допустим теперь, что  $\varepsilon_{t+1} > 0$ . Тогда следует перейти к новой функции потенциалов  $U_{t+1}^{(h)} = u_{t+1}^{(h)}(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , руководствуясь формулой

$$u_{t+1}^{(h)}(p_i) = \begin{cases} u_t(p_i) - h, & \text{если } p_i \in P'_t, \\ u_t(p_i), & \text{если } p_i \in P''_t. \end{cases} \quad (4.18)$$

Здесь  $P'_t$  и  $P''_t$  обозначают множества, полученные из  $\bar{P}'_t$  и  $\bar{P}''_t$  удалением источника  $p_0$  и стока  $p_{N+1}$  соответственно ( $\bar{P}'_t$  и  $\bar{P}''_t$  построены в процессе решения задачи

$\bar{A}_t$  и удовлетворяют условиям (4.14), (4.15)). Число  $h > 0$  выбирается как можно большим, но таким, чтобы  $X_{t+1}$  и  $U_{t+1}^{(h)}$  были связаны условиями оптимальности (4.3) — (4.5). Выявим ограничения, которым должен подчиняться выбор числа  $h$ . Для этого запишем очевидные соотношения

$$\begin{aligned} u_{t+1}^{(h)}(p_j) - u_{t+1}^{(h)}(p_i) = \\ = \begin{cases} u_t(p_j) - u_t(p_i), & \text{если либо } p_i, p_j \in P'_t, \\ & \text{либо } p_i, p_j \in P''_t, \\ u_t(p_j) - u_t(p_i) + h, & \text{если } p_i \in P'_t, p_j \in P''_t, \\ u_t(p_j) - u_t(p_i) - h, & \text{если } p_i \in P''_t, p_j \in P'_t. \end{cases} \quad (4.19) \end{aligned}$$

Пусть вначале  $k_{ij} \in K_t$ ,  $x_{t+1}(k_{ij}) \geq 0$ . В соответствии с соотношением (4.15)

$$x_{t+1}(k_{ij}) = x_t^*(k_{ij}) = \begin{cases} d_t(k_{ij}) = d_{ij}, & \text{если } p_i \in P'_t, p_j \in P''_t, \\ -d_t(k_{ij}) = 0, & \text{если } p_i \in P''_t, p_j \in P'_t. \end{cases} \quad (4.20)$$

Следовательно, при

$$0 < x_{t+1}(k_{ij}) < d_{ij}$$

пункты  $p_i$  и  $p_j$  одновременно принадлежат либо не принадлежат множеству  $P'_t$ , и из (4.19) вытекает

$$u_{t+1}^{(h)}(p_j) - u_{t+1}^{(h)}(p_i) = u_t(p_j) - u_t(p_i) = c_{ij}.$$

Если  $x_{t+1}(k_{ij}) = 0$ , то, согласно (4.20), включения  $p_i \in P'_t$ ,  $p_j \in P''_t$  влекут за собой равенство  $d_{ij} = 0$ , хотя по условию  $k_{ij} \in K_t \subset K$ . Следовательно\*), эти включения не могут иметь места, и, согласно (4.19),

$$u_{t+1}^{(h)}(p_j) - u_{t+1}^{(h)}(p_i) \leq c_{ij}.$$

Аналогично при  $x_{t+1}(k_{ij}) = d_{ij}$

$$u_{t+1}(p_j) - u_{t+1}(p_i) \geq c_{ij}.$$

---

\*) Множество  $K$  объединяет лишь такие коммуникации  $k_{ij}$ , для которых  $d(k_{ij}) > 0$ .

Таким образом, для выбранного  $k_{ij}$  справедливость условий (4.3) — (4.5) сохраняется при любом  $h \geq 0$ . Пусть теперь  $k_{ij} \notin K'_t$ ,  $x_{t+1}(k_{ij}) \geq 0$ . По предположению возможны два случая:

$$u_t(p_j) - u_t(p_i) < c_{ij}, \quad (4.21)$$

$$u_t(p_j) - u_t(p_i) > c_{ij}. \quad (4.22)$$

Неравенство (4.21) имеет место при  $x_t(k_{ij}) = x_{t+1}(k_{ij}) = 0$ , неравенство (4.22) — при  $x_t(k_{ij}) = x_{t+1}(k_{ij}) = d_{ij}$ . В случае (4.21) нарушение условий (4.3) — (4.5) для  $h > 0$  возможно только при  $p_i \in P'_t$ ,  $p_j \in P''_t$ . Аналогично в случае (4.22) опасность нарушения условий оптимальности для  $h > 0$  возникает лишь при  $p_i \in P''_t$ ,  $p_j \in P'_t$ .

Объединим в множество  $S_t$  те коммуникации  $k_{ij} \in K$ , не входящие в  $K'_t$ , которые идут из пункта  $p_i \in P'_t$  в пункт  $p_j \in P''_t$ , причем  $x_{t+1}(k_{ij}) = 0$ , либо соединяют пункт  $p_i \in P''_t$  с пунктом  $p_j \in P'_t$ , и в этом случае  $x_{t+1}(k_{ij}) = d_{ij}$ . Дальнейшее течение процесса решения задачи зависит от того, содержит ли  $S_t$  хотя бы одну коммуникацию или нет.

Будем говорить, что имеет место случай 2, если множество  $S_t$  пусто. Противоположную возможность назовем случаем 3.

Если имеет место случай 2, то план  $X_{t+1}$  связан с функцией потенциалов условиями оптимальности при любом  $h \geq 0$ . Покажем, что условия случая 2 влекут за собой неразрешимость исследуемой задачи.

Введем задачу  $\bar{A}$  о максимальном потоке на сети  $(\bar{P}, \bar{K})$ , совместимом с функцией  $\bar{d}(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in \bar{K}' = \{K, k_{0j}, k_{i, N+1}\}'$ , где, как обычно,

$$\bar{d}(k_{ij}) = \begin{cases} d(k_{ij}), & \text{если } k_{ij} \in K', \\ q(p_j), & \text{если } k_{ij} = k_{0j}, p_j \in P_+, \\ -q(p_i), & \text{если } k_{ij} = k_{i, N+1}, p_i \in P_-, \end{cases}$$

$$\bar{P} = \{P, p_0, p_{N+1}\}.$$

Задачи  $\bar{A}$  и  $A_t$  совпадают, если  $K_t = K$ .

Рассмотрим множества  $\bar{P}'_t = \{P'_t, p_0\}$  и  $\bar{P}''_t = \{P''_t, p_{N+1}\}$ , удовлетворяющие условиям (4.14), (4.15). Проверим, что они порождают минимальный разрез сети  $(\bar{P}, \bar{K})$ , а поток  $\bar{X}_{t+1} = \bar{X}_t^*$  является максимальным для задачи  $\bar{A}$ . Поскольку множество  $S_t$  пусто, то при  $k_{ij} \notin K'_t$ ,  $x_{t+1}(k_{ij}) \geq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{t+1}(k_{ij}) &= d_{ij}, & \text{если } p_i \in P'_t, p_j \in P'_t, \\ \bar{x}_{t+1}(k_{ij}) &= 0, & \text{если } p_i \in P''_t, p_j \in P'_t. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Система условий (4.14), (4.15) и (4.23) служит доказательством отмеченного факта.

В соответствии с постановкой задачи  $\bar{A}$  план  $X_{t+1}$  задачи  $T(\bar{q}_{t+1}, d, c)$  является решением задачи о максимизации функции (4.11) при условиях (4.8) и

$$-x(k_{ji}) = x(k_{ij}) \leq d_{ij}, \quad k_{ij} \in K'. \quad (4.24)$$

Следовательно, любая система перевозок  $X$ , подчиняющаяся условиям (4.8) и (4.24), удовлетворяет неравенству

$$x(P_+, P) \leq x_{t+1}(P_+, P) = \sum_{p_i \in P_+} q(p_i) - \varepsilon_{t+1},$$

которое с учетом положительности  $\varepsilon_{t+1}$  может быть записано в виде

$$x(P_+, P) < \sum_{p_i \in P_+} q(p_i). \quad (4.25)$$

Задача  $T(q, d, c)$  не имеет планов, поскольку предположение противного противоречит неравенству (4.25).

Обратимся к случаю 3, когда множество  $S_t$  содержит хотя бы одну коммуникацию. Положим

$$h_0 = \min_{k_{ij} \in S_t} |u_t(p_j) - u_t(p_i) - c_{ij}|, \quad (4.26)$$

$$u_{t+1}(p_i) = u_{t+1}^{(h_0)}(p_i), \quad p_i \in P, \quad (4.27)$$

и перейдем к следующей итерации, отправляясь от плана  $X_{t+1}$  и функции потенциалов  $U_{t+1}$ .

4.4. Повторим кратко последовательность действий внутри отдельной итерации венгерского метода.

Функция потенциалов  $U_t$  и план  $X_t$  задачи  $T(q, d, c)$ , связанные условиями (4.3) — (4.5), порождают вспомогательную задачу  $A_t$ .

Задача  $A_t$  сводится к задаче  $\bar{A}_t$  о максимальном потоке при фиксированных значениях его компонент  $x(k_{ij})$ , если  $k_{ij} \notin K'_t$ , и решается с помощью алгоритма гл. 10, отправляясь от исходного потока  $\bar{X}_t$ , отвечающего плану  $X_t$ . Перевозки  $\bar{x}_t^*(k_{ij})$  при  $k_{ij} \in K'$  максимального потока  $\bar{X}_t^*$  составляют решение  $X_t^*$  задачи  $A_t$ , которое принимается в качестве  $X_{t+1}$ . При этом

$$\varepsilon_{t+1} \leq \varepsilon_t.$$

Если  $\varepsilon_{t+1} = 0$  (случай 1), то  $X_{t+1}$  — искомое решение задачи.

Если  $\varepsilon_{t+1} > 0$ , процесс решения продолжается. Образуется множество коммуникаций  $S_t$ . Если оно оказывается пустым (случай 2), то условия задачи  $T(q, d, c)$  противоречивы.

Если же  $S_t$  содержит одну или несколько коммуникаций (случай 3), то по формулам (4.18), (4.26), (4.27) строится новая функция потенциалов  $U_{t+1}$ . На этом итерация заканчивается. Для того чтобы завершить обоснование венгерского метода, осталось доказать его конечность.

Покажем прежде всего, что через несколько итераций либо уменьшится значение невязки  $\varepsilon_{t+1} > 0$ , либо будет обнаружен случай 2.

Если  $p_i$  и  $p_j$  принадлежат множеству  $P'_t$ , причем  $k_{ij} \in K'_t$ , то, согласно (4.19), коммуникация  $k_{ij} \in K'_{t+1}$ . Следовательно, множество отмеченных пунктов  $\bar{P}'_{t+1} = \{P'_{t+1}, p_1\}$ , образуемое на первом шаге решения задачи  $\bar{A}_{t+1}$ , содержит  $P'_t$ . Кроме того, это множество включает все те пункты, которые соединены с  $P'_t$  коммуникациями  $k_{\lambda\mu}$ , содержащимися в  $S_t$  и минимизирующими выражение (4.26). Действительно, для каждой такой коммуникации  $k_{\lambda\mu}$

$$u_{t+1}(p_\mu) - u_{t+1}(p_\lambda) = c_{\mu\lambda},$$

причем

$$x_{t+1}(k_{\lambda\mu}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_\lambda \in P', p_\mu \in P', \\ d_{\lambda\mu}, & \text{если } p_\mu \in P', p_\lambda \in P'', \end{cases}$$

т. е. одна из пары противоположных коммуникаций  $k_{\lambda\mu}$ ,  $k_{\mu\lambda}$  является ненасыщенной коммуникацией множества  $K'_{t+1}$ , начинающейся в некотором пункте множества  $P'_t$ .

Если рассматриваемая итерация не уменьшит значения невязки, то  $X_{t+1} = X_{t+2}$ ,  $P'_t \subset P'_{t+1} = P'_{t+2}$ , причем  $P'_{t+1}$  шире  $P'_t$ .

Итак, каждая итерация, которая не сокращает величину невязки, расширяет множество отмеченных пунктов. Следовательно, если случай 2 невозможен, то не более чем через  $N$  итераций величина невязки сократится.

Предположим, что значения функций  $q(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , и  $d(k_{ij})$ ,  $k_{ij} \in K$ , — целые числа. В таком случае каждое сокращение невязки уменьшит ее по меньшей мере на единицу. Для окончания процесса потребуется не более чем  $\varepsilon_0$  сокращений невязки, где  $\varepsilon_0$  — невязка исходного плана  $X_0$ . Учитывая, что на сокращение невязки либо на выявление неразрешимости задачи затрачивается конечное число итераций, приходим к выводу о конечности метода.

**4.5.** Как мы видели в гл. 5, венгерский метод служит основой нескольких алгоритмов решения транспортных задач в матричной постановке. Различные вычислительные схемы венгерского метода отличаются лишь на этапе решения вспомогательной задачи. То же можно сказать о методе, изложенном в настоящем параграфе. Различные алгоритмы венгерского метода решения транспортных задач в сетевой постановке связаны с возможными модификациями алгоритма построения максимального потока, разобранным в § 3 гл. 10. В частности, таким образом могут быть получены все известные алгоритмы решения задач  $T$  и  $T_d$ , основанные на венгерском методе.

## § 5. Построение исходного плана $X_0$ и функции потенциалов $U_0$

Для того чтобы иметь возможность начать процесс решения задачи  $T(q, d, c)$  венгерским методом, необходимо предварительно построить план  $X_0$  задачи  $T(q_0, d, c)$  и функцию потенциалов  $u_0(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , связанные условиями оптимальности (4.3) — (4.5), где функция  $q_0(p_i)$ ,  $p_i \in P$ , удовлетворяет требованиям (4.1). План  $X_0$  и функция потенциалов  $U_0$  являются исходными данными для первой итерации; процесс их формирования составляет подготовительный этап метода. В качестве  $X_0$  принимается нулевой план. Подготовительный этап состоит в формировании функции потенциалов  $U_0$ , которая связана с  $X_0=0$  условиями оптимальности (4.3) — (4.5). Функция  $U_0$  определяется рекуррентным способом.

Выберем произвольный пункт сети  $(P, K)$ , например  $p_1$ , и положим

$$u_0(p_1) = 0.$$

Допустим, что значения искомой функции  $U_0$  найдены для всех пунктов  $p_i$  множеств  $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_s$ , где  $P_0 = \{p_1\}$ . Рассмотрим любой пункт  $p_\mu \notin P_s$ , который связан хотя бы с одним пунктом множества  $P_s$  с помощью коммуникаций множества  $K'$ , и положим  $P_{s+1} = \{P_s, p_\mu\}$ . Введем множества пунктов  $\epsilon'_{\mu s}$ ,  $\epsilon''_{\mu s}$ , руководствуясь правилом

$$p_\lambda \in \epsilon'_{\mu s}, \quad \text{если} \quad p_\lambda \in P_s, \quad k_{\lambda\mu} \in K',$$

$$p_\lambda \in \epsilon''_{\mu s}, \quad \text{если} \quad p_\lambda \notin P_s, \quad k_{\lambda\mu} \in K'.$$

Выбор значения  $u_0(p_\mu)$  функции потенциалов  $U_0$  ограничивается условиями

$$-c_{\lambda\mu} \leq u_0(p_\mu) - u_0(p_\lambda) \leq c_{\mu\lambda}, \quad \text{если} \quad p_\lambda \in \epsilon'_{\mu s}, \quad (5.1)$$

$$-c_{\lambda\mu} \leq u_0(p_\mu) \leq c_{\mu\lambda}, \quad \text{если} \quad p_\lambda \in \epsilon''_{\mu s}. \quad (5.2)$$

Система неравенств (5.1) — (5.2) относительно  $u_0(p_\mu)$  разрешима при уже выбранных  $u_0(p_\lambda)$ , где  $p_\lambda \in \epsilon'_{\mu s} \subset P_s$ . Одним из ее решений является  $u_0(p_\mu) = 0$ . Действительно, при  $s=0$  это очевидно.

Пусть сформулированное утверждение верно для  $P_0, P_1, \dots, P_{s-1}$ , причем значения функции  $u_0(p)$  для  $p \in P_{s-1}$  уже найдены и удовлетворяют условиям (5.1) — (5.2), в которых  $s$  заменено на  $t=0, 1, 2, \dots, s-1$ .

Для доказательства разрешимости (5.1) — (5.2) достаточно проверить, что

$$-c_{\lambda\mu} \leq -u_0(p_\lambda) \leq c_{\mu\lambda}, \quad \text{если } p_\lambda \in \varepsilon'_{\mu s}. \quad (5.3)$$

Выберем номер  $s(\lambda) < s$  таким, чтобы

$$p_\lambda \notin P_{s(\lambda)}, \quad p_\lambda \in P_{s(\lambda)+1} = \{P_{s(\lambda)}, p_\lambda\}.$$

В таком случае (5.3) вытекает из условий (5.2), где  $s$  заменено на  $t=s(\lambda)$ , соблюдение которых является следствием предположения индукции. Совместность системы неравенств (5.1), (5.2) доказана.

Положим

$$\left. \begin{aligned} u_0^+(p_\mu) &= \min \left\{ \min_{\lambda \in \varepsilon'_{\mu s}} [c_{\mu\lambda} + u_0(p_\lambda)], \min_{\lambda \in \varepsilon''_{\mu s}} c_{\mu\lambda} \right\}, \\ u_0^-(p_\mu) &= \max \left\{ \max_{\lambda \in \varepsilon'_{\mu s}} [-c_{\lambda\mu} + u_0(p_\lambda)], \max_{\lambda \in \varepsilon''_{\mu s}} (-c_{\lambda\mu}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Система неравенств (5.1), (5.2) эквивалентна ограничениям

$$u_0^-(p_\mu) \leq u_0(p_\mu) \leq u_0^+(p_\mu). \quad (5.5)$$

Величина  $u_0(p_\mu)$  полагается равной либо  $u_0^-(p_\mu)$ , либо  $u_0^+(p_\mu)$ , причем предпочтение обычно отдается тому из этих двух значений, которое отвечает большему числу условий (5.1), (5.2), обращаемых выбранным  $u_0(p_\mu)$  в равенства. Определив  $u_0(p_\mu)$ , продолжают процесс построения функции  $U_0$ , отправляясь от  $P_{s+1} = \{P_s, p_\mu\}$ . Поскольку сеть  $(P, K)$  предполагается связной, то через  $N-1$  шагов потенциалы  $u_0(p_i)$  оказываются вычисленными для всех пунктов  $p_i \in P$ .

Ограничения (5.1), которые соблюдались на каждом из шагов подготовительного этапа, приводят к системе неравенств

$$-c_{\mu\lambda} \leq u_0(p_\lambda) - u_0(p_\mu) \leq c_{\lambda\mu}, \quad \text{если } k_{\lambda\mu} \in K', \quad (5.6)$$

представляющей собой условия оптимальности для плана  $X_0=0$ .

План  $X_0=0$  и построенная функция потенциалов  $U_0$  принимаются за исходные данные первой итерации. Невязка  $\varepsilon_0$  плана  $X_0$  равна суммарной производительности всех пунктов производства задачи.

## § 6. Пример

Для лучшего уяснения венгерского метода решим с его помощью задачу, рассмотренную в § 2 (см. рис. 12.1).

Подготовительный этап. Положим  $u_0(p_1)=0$ . Потенциал пункта  $p_3$ , связанного с  $p_1$  коммуникациями сети, удовлетворяет ограничениям

$$\begin{aligned} |u_0(p_3)| &\leq 2 & (k_{13}, k_{31}, k_{35}, k_{53}, k_{32}, k_{23}, k_{36}, k_{63}), \\ |u_0(p_3)| &\leq 1 & (k_{34}, k_{43}), \end{aligned}$$

где в скобках отмечены коммуникации, породившие соответствующее неравенство. В данном случае  $u_0^+(p_3)=1$ ,  $u_0^-(p_3)=-1$ . Полагаем  $u_0(p_3)=1$ .

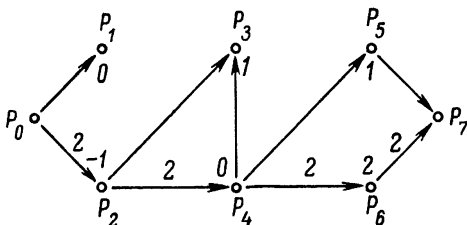


Рис. 12.4.

Аналогичным образом определяем остальные значения функции  $U_0$

$$u_0(p_2)=-1, u_0(p_5)=1, u_0(p_6)=2, u_0(p_4)=0.$$

Транспортная сеть  $(P, K_0)$ , дополненная источником  $p_0$ , стоком  $p_7$  и коммуникациями  $k_{01}, k_{02}, k_{57}, k_{67}$ , изображена на рис. 12.4; у каждого пункта сети помещено соответствующее значение функции  $U_0$ .

Итерация I. Исходными данными итерации I являются план  $X_0=0$  и функция потенциалов  $U_0$ . Итерация начинается с решения задачи  $\bar{A}_0$  об отыскании максимального потока на сети  $(\bar{P}, \bar{K}_0)$ , изображенной на рис. 12.4. Задача требует двух шагов алгоритма максимального потока. На первом шаге две единицы продукта направляются из  $p_2$  через  $p_4$  в  $p_6$ . Второй шаг

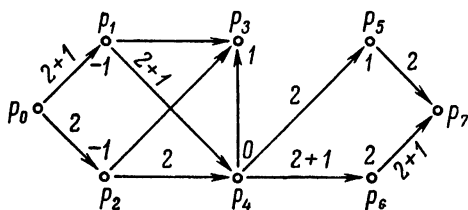


Рис. 12.5.

фиксирует максимальность полученного потока, причем  $P'_0 = \{p_1\}$ .

План  $X_1$  отличен от нуля только на двух коммуникациях

$$x_1(k_{24}) = x_1(k_{46}) = 2.$$

Невязка  $\varepsilon_1$  полученного плана  $X_1$  рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_1 = q(p_1) + q(p_2) - x_1(p_1, P) - x_1(p_2, P) = 4 > 0.$$

Итерация должна быть продолжена, так как случай 1 не имеет места. Из пункта  $p_1$  выходят две коммуникации, не принадлежащие  $K'_0$  и заканчивающиеся в пунктах множества  $P''_0$ , по каждой из которых запланирована нулевая перевозка:  $k_{13}$  и  $k_{14}$ . Перевозки из пунктов  $P''_0$  в  $p_1$ , равные пропускным способностям соответствующих коммуникаций, отсутствуют. Итак,  $S_0 = \{k_{13}, k_{14}\}$ . Следовательно, имеет место случай 3, причем

$$h = \min\{[c_{31} - (u_3 - u_1)], [c_{41} - (u_4 - u_1)]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

Новая функция потенциалов  $u_1(p_i)$  отличается от  $u_0(p_i)$  только в пункте  $p_1$ :  $u_1(p_1) = u_0(p_1) - h = -1$ .

Итерация II. Транспортная сеть  $(\bar{P}, \bar{K}_1)$  с источником  $p_0$  и стоком  $p_7$  изображена на рис. 12.5. Множество  $K_1$  получено из  $K_0$  добавлением коммуникаций  $k_{13}$  и  $k_{14}$ . Алгоритм максимального потока для задачи  $\bar{A}_1$  складывается из трех шагов. На первом шаге две единицы продукта направляются из  $p_1$  через  $p_4$  в  $p_5$ . На втором шаге одна единица продукта из  $p_1$  направляется в  $p_6$  через  $p_4$ . Третий шаг служит для фиксации того,

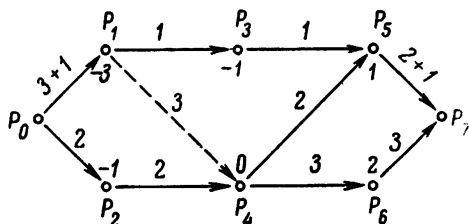


Рис. 12.6.

что план  $X_2$ , перевозки которого обозначены на рис. 12.5 около соответствующих коммуникаций, является решением задачи  $A_1$ . При этом строится множество  $P'_1 = \{p_1, p_3\}$ . Поскольку

$$\varepsilon_2 = 1 > 0,$$

то итерация продолжается. Строим множество  $S_1 = \{k_{35}, k_{36}\}$  и определяем

$$h = c_{53} - [u_1(p_5) - u_1(p_3)] = 2.$$

Имеем

$$u_2(p_i) = \begin{cases} u_1(p_i), & \text{если } p_i \notin P'_1, \\ u_1(p_i) - 2, & \text{если } p_i \in P'_1. \end{cases}$$

Итерация III. Новая транспортная сеть  $(\bar{P}, \bar{K}_2)$  изображена на рис. 12.6. Множество  $K_2$  образуется из  $K_1$  путем исключения коммуникаций  $k_{14}$ ,  $k_{23}$ ,  $k_{43}$  и

добавления коммуникации  $k_{35}$ . Величина перевозки по коммуникации  $k_{14} \notin K_2$ , равная 3, фиксируется в течение всей итерации (коммуникация  $k_{14}$  помечена пунктиром). Задача  $\bar{A}_2$  (а следовательно, и  $A_2$ ) решается за два шага алгоритма максимального потока. На первом шаге единица продукта перевозится из  $p_1$  через  $p_3$  в  $p_5$ . На втором — устанавливается оптимальность потока  $\bar{X}_2^*$ , компоненты которого обозначены около соответствующих коммуникаций множества  $K_2$  и коммуникации  $k_{14}$  на рис. 12.6. Поскольку невязка  $\varepsilon_3$  плана  $X_3 = X_2^*$  равна нулю, итерация III завершилась случаем 1;  $X_3$  — иско-  
мое решение задачи.

- 1 Беллман (Bellman R.), On a routing problem. *Quart. Appl. Math.* **16**, 1 (1958).
2. Берж (Berge C.), Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962.
3. Брудно А. Л., Решение транспортной задачи методом вычеркивающей нумерации. В сб. «Применение ЦВМ в экономике», Изд. АН СССР, 1962, стр. 17—38.
4. Вильямс (Williams A. C.), A treatment of transportation problems by decomposition. *L. Soc. Ind. Appl. Math.* **10**, 1, 35—48 (1962).
5. Гавурин М. К., Рубинштейн Г. Ш., Сурин С. С., Об оптимальном использовании производственных средств при выполнении нескольких видов работ (обобщенная транспортная задача). АН СССР, СО, экономико-математическая серия, вып. 1, (1965) стр. 7—34.
6. Гасс (Gass S. I.), Линейное программирование (методы и приложения), Физматгиз, 1961.
7. Глейзал (Gleyzal A.), Алгоритм для решения проблемы транспортировки, «Математика» **2**, 1 (1958).
8. Гольштейн Е. Г., Об одном классе нелинейных экстремальных задач, ДАН СССР **133**, 3 (1960).
9. Гольштейн Е. Г., О возможности расширения применимости частных методов линейного программирования. Сб. «Планирование и экономико-математические методы». (К семидесятилетию академика В. С. Немчинова), «Наука», 1964, стр. 409—423.
10. Гольштейн Е. Г., Транспортная задача и ее обобщения. Сб. «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963.
11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, Изд-во «Советское радио», 1966.
12. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Об одном классе задач планирования народного хозяйства. Сб. «Проблемы кибернетики», **5**, 1961, стр. 165—182.
13. Горушкин В. И., Выполнение энергетических расчетов с помощью вычислительных машин, Изд-во «Высшая школа», 1962.
14. Данциг (Dantzig G. B.), Application of the simplex method to a transportation problem. Activity analysis of production and allocation, ed. T. C. Koopmans, Cowles Commission Monograph, **13**, Wiley, New York, 1951, стр. 359—373.

15. Журавлев Г. Е., Методы решения задач на наилучшее использование и рациональный выбор машин автотракторного парка колхозов и совхозов. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. АН СССР, СО, 1962.

16. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, изд. 2-е, «Наука», 1967.

17. Зуховицкий С. И., Радчик И. А., Математические методы сетевого планирования, «Наука», 1965.

18. Канторович Л. В., Математические методы в организации и планировании производства, ЛГУ, 1939, стр. 67.

19. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. В сб. «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», Изд. АН СССР, 1949, стр. 110—138.

20. Каплан А. Б., Перспективы применения математических методов для комплексного регулирования вагонного парка железных дорог. Труды научного совещания по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании, т. V, Планирование и эксплуатация на транспорте, Изд. АН СССР, 1961.

21. Коробочкин М. И., Определение оптимальных высот наружных знаков для фиксированной в плане геодезической сети. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством, Изд. МГУ, 1963.

22. Кузнецов Ю. А., Мелентьев Л. А., Меренков А. П., Некрасов А. С., Методика определения оптимальной структуры перспективного энергетического баланса с использованием ЭВМ. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании, АН СССР, СО, 1962.

23. Кун (Kuhn H. W.), Венгерский метод решения задачи о назначениях. Сб. «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963.

24. Кун (Kuhn H. W.), Некоторые видоизменения венгерского метода для задачи о назначениях. Сб. статей «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963.

25. Лебедев С. С., Алгоритм решения распределительной задачи. Сб. «Экономико-математические методы», вып. II, «Наука», 1965, стр. 247—267.

26. Лурье А. Л., Алгоритм решения распределительной задачи. Сб. статей под редакцией В. С. Немчинова «Применение математики в экономических исследованиях», т. II, Соцэкгиз, 1962.

27. Лурье А. Л., Алгоритм решения транспортной задачи путем приближения условно-оптимальными планами. Сб. «Вычислительная математика», 1961, № 7, стр. 151—160.

28. Малков У. Х., Алгоритм решения распределительной задачи. Сб. «Вычислительная математика и математическая физика», 2, 2, 358—366 (1962).

29. Малков У. Х., Решение некоторых задач линейного программирования. Кандидатская диссертация, М., 1962.

30. Манкрес (Munkres J.), Алгоритм решения задачи выбора и транспортной задачи. Сб. «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963, стр. 73—79.
31. Манн (Mann A. S.), A target-assignment problem. The Journal of the Operations Research Society of America 6, 3, 307—466 (1958).
32. Марковиц (Markowitz H.), Concepts and computing procedures for certain  $x_{ij}$ -programming, Washington, 1955, стр. 509—565.
33. Минти (Minty G.), A comment on the shortest-route problem. Oper. Res. 5, 724 (1957).
34. Мовшович С. М., Об одной задаче планирования перевозок неоднородных взаимозаменяемых продуктов. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3, «Мысль», 1965.
35. Олейник Ю. А. Решение задачи о транспортировке на ЭВМ методом приближения условно-оптимальными планами. АН СССР, ВЦ, 1960.
36. Поллак, Вибенсон (Pollac M., Wiebenson W.), Solutions of the shortest-route problem — a review. Oper. Res., 8, 2, 224—230 (1960). -
37. Рейнфельд, Фогель (Reinfeld N. V., Fogel W. R.), Математическое программирование. ИЛ, 1960.
38. Савин В. И., Опыт применения математических методов и ЭЦВМ в эксплуатационных расчетах на речном транспорте. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании, АН СССР, СО, 1962.
39. Сб. «Применение математики и электронной техники в планировании», Изд-во экономической литературы, М., 1961.
40. Толстой А. Н., Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. «Социалистический транспорт» 9, 28—51 (1939).
41. Фергюсон, Данциг (Ferguson R. O., Dantzig G. B.), Problem of routing aircraft. Aeron. Engineering Rev. 14, 51—55 (1955).
42. Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.), Алгоритм одновременного решения прямой и двойственной задач для проблемы Хичкока с ограниченными пропускными способностями. Сб. «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963.
43. Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.), A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. Nav. Res. Logist Quart. 4, 1, 45—54 (1957).
44. Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.), Maximal flow through a network. Canadian J. Math. 8, 399—404 (1956).
45. Форд, Фулкерсон, Решение транспортной задачи. Сб. «Методы и алгоритмы решения транспортной задачи», Госстатиздат, 1963, стр. 61—72.

46. Хичкок (Hitchcock F. L.). Distribution of a product from several sources to numerous localities. *J. Math. Phys.* **20**, 224—230 (1941).
47. Чарнес, Купер, Меллон (Charnes A., Cooper W., Mellon B.), Blending aviation gasolines. *Econometrica*, **20**, 2, 135—159 (1952).
48. Шимбел (Shimbell), Structure in communication nets. Proceedings of the symposium on information networks, Polytechnic Institute of Brooklyn, April, 1954, стр. 12—14.
49. Шкурба В. В., Одна общая задача линейного программирования. Научно-методические материалы экономико-математического семинара, вып. 1, ЛЭММ АН СССР и ВЦ АН УССР, 1962 (ротапринт).
50. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Задачи и методы линейного программирования. Изд. 2-е, переработанное и дополненное, Изд-во «Советское радио», 1964.
51. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование (теория и конечные методы), Физматгиз, 1963.
52. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование (теория, методы и приложения), «Наука», 1968.
53. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. II, Соцэкгиз, 1962, стр. 136—199.
54. Триус Е. Б., Задачи математического программирования транспортного типа, Изд-во «Советское радио», 1967.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраический план перевозок 286
- Алгоритм метода потенциалов 124
- построения максимального потока для решения задачи  $A_i$  362
- Арифметический план опорный 326
- — перевозок 281
- Базисные коммуникации опорного плана  $X$  349
- Вектор коммуникаций 72
- производства — потребления 72
- Векторы условий единичные 263
- Величина потока 283
- транспортных расходов маршрута  $l$  288
- Венгерский метод 164
- Возврат к старому базису 118
- Вспомогательная задача  $A_i$  261
- Вторая теорема двойственности для задачи  $T$  80
- Выборы соответствующие 171
- Выпуклый многогранник 180
- Граф 281
- Графическое изображение транспортной сети 276
- — транспортных задач 274
- Загрузка памяти ЦВМ 298
- Задача вспомогательная  $A_i$  361
- выбора 13
  - геодезическая 63
- Задача линейная 321
- линейного программирования специального типа 33
  - о выборе наиболее экономного маршрута 288
  - о кратчайшем пути 34, 289
  - о максимальном потоке 32
  - о назначениях 13
  - о распределении башенных кранов между строительными площадками 52
  - — — посевной площади 59
  - о рациональном использовании машинно-тракторного парка 52
  - о регулировании парка вагонов 54
  - о смеси 61
  - об определении рациональной структуры энергетического баланса 55
  - об оптимальной загрузке оборудования 52
  - размещения заказов и загрузки оборудования 271
  - распределительная 242
  - $T_d$  82
  - $T_d(s)$  153
  - $T(q, c)$  333
  - $T(q, d, c)$  322
  - $T$ -невыврожденная 117
  - $T(q, d, c)$  невырожденная 341
  - типа  $T$  11
  - —  $T_d$  146
- Задачи выбора эквивалентные 176
- Зацикливание 153, 349

**Источник 282**

Исходный опорный план распределительной задачи 261

Коммуникации противоположные 276

— сети 276

Коммуникация  $X$ -насыщенная 304

Конец маршрута 279

Критерий оптимальности плана задачи  $T_d$  82

— — —  $T(q, d, c)$  325

— — — распределительной задачи 255

Критический путь 36, 37

Ломаная линия без самопересечений 299

— —, допускающая самопересечения 355

Ломаные выпуклые вниз 65

**М-метод 263**

Максимальное количество информации 33

Максимальные связанные подсети 324

Маршрут 84, 278

— замкнутый 85, 279

— направленный 279

— — замкнутый 279

— обобщенный 299, 355

— оптимальный 288

—  $s$ -оптимальный 294, 299

Матрица почти треугольная 250

— транспортной сети 276

— транспортных издержек 71

— треугольная 249

Матрицы эквивалентные 166

Матричные постановки транспортных задач  $T$  274

Метод венгерский 164

— двойственный 236

— замкнутых маршрутов 359

— минимального элемента 139, 264

— параметрического программирования 271

— потенциалов 109

— — двойственный 236

Метод потенциалов обобщенный 251

— северо-западного угла 98

— сокращения невязок 273

— уточнения оценок 273

Методы специальные 40

Минимальный элемент 139

Множество ограниченное 75

Модель типа  $T$  275

Модификация алгоритма построения максимального потока 315

Модифицированный распределительный метод 110

Наименьшие суммарные затраты на разработку 38

Начало маршрута 279

Невязка для пунктов потребления 194

— — — производства 194

— столбцов 194

— строк 194

— суммарная 182

Нули независимые 166

Обобщение приближенного метода решения  $T$ -задачи 264

Обобщенные транспортные расходы 142

Обобщенный объем потребления 142

— — производства 141

Общая задача линейного программирования 72

Объем перевозок 11

Ограничения пропускных способностей станций 32

Опорный план вырожденный 104

— — невырожденный 104

— — нераспадающийся 105

— — распадающийся 105

Оптимальность плана  $X_d$  190

Оптимальный план задачи  $T(q, d, c)$  323

Организация перевозок 32

Основные коммуникации плана  $X$  326

Отдельный шаг итерации 305

Отрицательный замкнутый маршрут 353, 357

Параметры управления 15  
 Первая теорема двойственности  
   для задачи  $T$  79  
 Перевозки 70  
   — обобщенные 120  
 План арифметический опорный 326  
   — двойственной задачи  $\tilde{T}$  236  
   — задачи  $T(q, d, c)$  323  
   — —  $T(q, d, c)$  опорный 341  
   — обобщенный 120  
   — оптимальный 70  
   — перевозок 10, 70, 286  
   — — алгебраический 286  
   — — арифметический 286  
   — потенциальный 111  
 Подсеть максимальная 280  
   — транспортной сети 279  
 Показатели качества 39  
 Постановки смешанного типа 242  
   — транспортных задач матрич-  
   ные 328  
   — — — сетевые 328  
 Потенциалы предварительные 110  
   — пунктов 111  
 Поток алгебраический 285  
   — арифметический 284  
   — максимальный 301  
   — на сети 283  
 Правило выбора перевозок, уда-  
   ляемых из базиса 153  
   — вычеркивания 94  
 Предварительные потенциалы 110  
 Признак оптимальности плана  $X$   
   задачи  $T(q, d, c)$  353  
   — — потока 304  
 Программирование параметриче-  
   ское 273  
 Пропускная способность комму-  
   никации 81  
   — — разреза 303  
 Псевдоплан задачи  $T$  236  
 Пункт маршрута крайний 278  
 Пункты потребления 9  
   — производства 9  
   — транспортной сети 276  
   — — — соседние 341  
 Пустое множество 233  
 Путь критический 36, 37

Равномерная сходимость процес-  
   са 299  
 Разветвленная сеть связи 33  
 Разрез сети минимальный 311  
   — транспортной сети 303  
 Распределительная задача 50  
 Распространение венгерского ме-  
   тода для задач  $T$  и  $T_d$  359  
 Расширение множества  $K$  284  
   — —  $K_i$  360  
 Решение задачи  $T(q, d, c)$  323  
   —  $T$ -задачи обобщенное 121  
   — транспортной задачи 70  
 Связная подсеть транспортной  
   сети 280  
 Семейство  $\varepsilon$ -задач 349  
 Сетевые методы 32  
   — — решения 33  
 Сеть 275  
 Скорость отвода жидкости 283  
   — притока жидкости 283  
   — протекания жидкости 283  
 Специальные методы 40  
 Способ производства 37  
 Степень насыщенности маршру-  
   та 313  
 Сток 282  
 Сходимость процесса равномер-  
   ная 299  
 Теорема двойственности первая  
   для задачи о максимальном  
   потоке 312  
   — — — — —  $T$  79  
   — о множестве  $K_x$  341  
   — о ранге матрицы условий рас-  
   пределительной задачи 244  
   — о существовании минималь-  
   ного разреза сети 312  
   — о треугольном виде базиса  
   оптимального плана 272  
   — о целочисленности решения  
   транспортной задачи 103  
   — об анализе задачи типа  
    $T(q, c)$  337  
   — — — транспортной задачи на  
   сети 333  
 Теория графов 281  
 Транспортная задача на сети  
   328

- Транспортная задача обобщенная 242  
 — — с ограниченными пропускными способностями 13  
 — интерпретация 33  
 — модель замкнутая 10  
 — — открытая 11  
 — сеть 32, 275, 320  
 — — направленно связная 280  
 — — связная 280  
 Транспортные издержки 9
- Упрощенное правило выбора перевозок, удаляемых из базиса 156  
 Условие баланса 286  
 — невырожденности  $T$ -задачи 106  
 — оптимальности плана  $T$ -задачи 81, 111  
 — разрешимости задачи  $T(q, d, c)$  332  
 Условия разрешимости транспортной задачи 73  
 Условная экстремальная задача 38  
 Участки ненапряженные 37
- Факторы ограничивающие важные 38
- Фиктивный пункт потребления 11  
 — — производства 12  
 Функции выпуклые вниз 65  
 —, определенные на множестве коммуникаций сети 281  
 —, — — пунктов сети 281  
 Функция потенциалов 360  
 — производства и потребления 282  
 — пропускных способностей коммуникаций 282
- $X$ -существенный элемент 111
- Целочисленность опорных планов  $T$ -задачи 101  
 Цепочка 85  
 — замкнутая 85
- Шаг этапа 224  
 Штраф за единицу нереализованного продукта 11
- Экономный опорный план задачи  $T_d(M)$  153  
 Элемент  $X$ -неполный 206  
 —  $X$ -полный 206  
 Элементы выделенные 167  
 — использованные 255

*Евгений Григорьевич Гольштейн,  
Давид Беркович Юдин*

**ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
ТРАНСПОРТНОГО ТИПА**

(Серия: «Экономико математическая библиотека»)

М., 1969 г., 384 стр. с илл.

Редактор *С. М. Мовшович*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *Л. Н. Боровина*

---

Сдано в набор 3/IV 1969 г. Подписано к печати 12/IX-69 г. Бумага  $84 \times 108^{1/32}$ . Физ. печ. л. 12. Усл. печ. л. 20,16. Уч.-изд. л. 19,4. Тираж 9650 экз. Т-13218.  
Цена книги 1 р. 42 к. Заказ № 122

---

Издательство «Наука»

Главная редакция  
физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966, 332 стр. 1 р. 21 к.

Красовский А. А., Статистическая теория переходных процессов в системах управления, «Наука», 1968, 240 стр., 97 коп.

Ладыженская О. А. и др., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967, 736 стр., 2 р. 55 к.

Лейтман Дж., Введение в теорию оптимального управления, перев. с англ., «Наука», 1968, 192 стр., 78 коп.

Основы автоматического управления, изд. 2-е, исправл., под ред. П. Ф. Пугачева, «Наука», 1968, 680 стр., 2 р. 90 к.

Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967, 488 стр., 2 р. 12 к.

*Требуйте эти книги в магазинах Книготорга. Письменный заказ можно направить также в ближайший отдел «Книга — почтой» республиканского, областного, краевого книготорга. Литература будет выслана наложенным платежом.*

*В случае отсутствия литературы на месте заказы можно направлять по адресу: Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги, отдел «Книга — почтой».*

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН  
Д. Б. ЮДИН

**Задачи  
линейного  
программирования  
транспортного  
типа**



